

Évaluation des exercices :

[E]= « élémentaire » : application directe des définitions et des résultats du cours.

[S]= « standard » : exercice « classique », souvent rencontré et souvent utilisé.

Feuille d'exercices 2

Révisions sur les anneaux

Exercice 1 - Soient A un anneau et x un élément de A . Montrer les implications :

- [ES] 1 - x inversible à gauche $\Rightarrow x$ régulier à gauche (réciproque ?) ;
[ES] 2 - x inversible $\Leftrightarrow x$ inversible à gauche et régulier à droite ;
[ES] 3 - (A est supposé fini) x inversible à gauche $\Leftrightarrow x$ régulier à gauche $\Leftrightarrow x$ inversible à droite $\Leftrightarrow x$ régulier à droite.
4 - Quels sont les éléments inversibles (resp. réguliers) de l'anneau $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

- [S] **Exercice 2** - Soient K un corps, V un K -espace vectoriel, A l'anneau $\text{End}_K(V)$ et u un élément de A . Montrer les équivalences :

$$\begin{aligned} u \text{ inversible à gauche} &\Leftrightarrow u \text{ régulier à gauche} &\Leftrightarrow u \text{ injectif;} \\ u \text{ inversible à droite} &\Leftrightarrow u \text{ régulier à droite} &\Leftrightarrow u \text{ surjectif.} \end{aligned}$$

- [E] Que peut-on dire de plus si V est de dimension finie ?

Exercice 3 -

- [S] 1 - Rappeler quel est l'inverse de $(1 - T)$ dans l'anneau $\mathbb{Z}[[T]]$ des séries formelles en T (à coefficients dans \mathbb{Z}).
2 - Soient A un anneau unitaire (pas forcément commutatif), et $(a, b) \in A^2$. Montrer que si $(1 - ab)$ est inversible, alors $(1 - ba)$ l'est également. On pourra utiliser la question précédente pour conjecturer l'inverse de $(1 - ba)$ en fonction de celui de $(1 - ab)$, et vérifier ensuite la conjecture.
3 - Soit A l'anneau (non commutatif) des endomorphismes de l'espace vectoriel $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soient a et $b \in A$ définis par $a(f) = f'$, et $b(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$, pour tous $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$. Vérifier que ab est inversible, tandis que ba ne l'est pas.

- [E] **Exercice 4** - Donner un exemple d'anneau fini non commutatif.

Dans la suite, les anneaux sont commutatifs (sauf mention contraire).

- [ES] **Exercice 5** - Soit $f : A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux, et soit $x \in A$. Vrai ou faux :
1 - x régulier dans $A \Rightarrow f(x)$ régulier dans B ;
2 - x inversible dans $A \Rightarrow f(x)$ inversible dans B ;
Mêmes questions pour les implications réciproques. Mêmes questions en supposant f injectif (resp. surjectif).

- [E] **Exercice 6** - Soit A un anneau.

- 1 - Quel est le sous-groupe de $(A, +)$ engendré par 1 ?
- 2 - Quel est le sous-groupe de (A^\times, \times) engendré par 1 ?
- 3 - Quel est l'idéal de A engendré par 1 ?
- 4 - Quel est le sous-anneau de A engendré par 1 ?

Exercice 7 -

- [S] 1 - Soit n un entier. Quels sont les idéaux de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?
- 2 - Soit A un anneau tel que tout sous-groupe de $(A, +)$ soit un idéal de A . Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $A \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 8 - (Lois non classiques) On munit \mathbb{Z} des deux lois internes \oplus et \otimes définies par les formules $x \oplus y = x + y + 1$ et $x \otimes y = xy + x + y$. Montrer que $(\mathbb{Z}; \oplus; \otimes)$ est un anneau. À quel anneau plus classique est-il isomorphe ?

Exercice 9 - (Morphisme de Frobenius) Soient p un nombre premier, et A un anneau tel que $p1_A = 0$.

- [ES] 1 - Montrer que $px = 0$ pour tout $x \in A$.
- [S] 2 - Montrer que les coefficients du binôme $\binom{p}{i}$ sont nuls pour $0 < i < p$.
- [S] 3 - Montrer que l'application $F : A \rightarrow A$ donnée par $F(x) = x^p$ est un endomorphisme d'anneau. Que vaut-il dans le cas où $A = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?

[S] **Exercice 10 -** (Endomorphismes de \mathbb{R} et de \mathbb{C})

- 1 - Trouver tous les morphismes d'anneaux $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. (On pourra montrer qu'un tel morphisme fixe \mathbb{Z} et \mathbb{Q} point par point, puis qu'il est croissant).
- 2 - Trouver tous les morphismes d'anneaux $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ qui commutent avec la conjugaison complexe.
- 3 - Trouver tous les morphismes d'anneaux $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ qui sont continus.

Exercice 11 - (Anneaux produits) Soient L un ensemble et $(A_l)_{l \in L}$ une famille d'anneaux indexée par L . On considère l'anneau produit $A = \prod_{l \in L} A_l$.

- [S] 1 - On suppose que L est fini. Montrer que tout idéal de A est de la forme $\prod_{l \in L} J_l$ où chaque J_l est un idéal de A_l (indication : pour chaque $m \in L$, utiliser l'élément e_m dont chaque composante est nulle sauf la m -ième qui vaut 1_{A_m}).
- 2 - On suppose que L est infini et que tous les A_l sont non nuls. Soit J l'ensemble des $(x_l)_{l \in L} \in A$ dont toutes les composantes x_l sont nulles sauf un nombre fini. Montrer que J est un idéal de A qui n'est pas un « produit » (au sens de la question précédente) d'idéaux des A_l .
- [ES] 3 - Montrer que A est intègre si et seulement si un seul des A_l est intègre, les autres étant nuls.
- [ES] 4 - Montrer que A est un corps si et seulement si un seul des A_l est un corps, les autres étant nuls.

- [S] **Exercice 12 -** (Lemme chinois) Soient A un anneau, I et J deux idéaux de A tels que $I + J = A$ (on dit alors que I et J sont *étrangers*). Montrer que le morphisme canonique

$\phi : A \rightarrow (A/I) \times (A/J)$ est surjectif, et que $IJ = I \cap J$. En déduire que $A/(IJ)$ et $(A/I) \times (A/J)$ sont isomorphes.

Exercice 13 - (Idempotents et produits) Un élément e d'un anneau A est *idempotent* si $e^2 = e$.

- [ES] 1 - Soit A un anneau intègre. Quels sont les idempotents de A ?
- [ES] 2 - Soit $(A_l)_{l \in L}$ une famille d'anneaux. Quels sont les idempotents de $\prod_{l \in L} A_l$? Et si tous les A_l sont intègres ?
- [E] 3 - Quels sont les idempotents de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$? de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?
- [S] 4 - Si $e \in A$ est idempotent, montrer que $1 - e$ est idempotent. Montrer que l'idéal eA est un anneau unitaire d'élément unité e , puis que l'application

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow eA \times (1 - e)A \\ x &\longmapsto (ex, (1 - e)x) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'anneaux. Quel est son inverse ?

Exercice 14 - (Nilpotents, anneaux réduits) Un élément x d'un anneau A est *nilpotent* s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x^k = 0$. L'ensemble des éléments nilpotents de A est le *nilradical* de A , noté $\text{nil}(A)$. On dit que A est *réduit* si $\text{nil}(A) = \{0\}$.

- [ES] 1 - Montrer que tout anneau intègre est réduit.
- [ES] 2 - Montrer que tout sous-anneau (unitaire ou non) d'un anneau réduit est réduit.
- [ES] 3 - Montrer qu'un anneau A est réduit si et seulement si tout élément de A de carré nul est nul.
- [ES] 4 - Montrer qu'un produit $A = \prod_{l \in L} A_l$ d'anneaux est réduit si et seulement si tous les A_l sont réduits.
- [E] 5 - Plus généralement, quel est le nilradical de $A = \prod_{l \in L} A_l$?... Sûr ?
- [ES] 6 - Quel est le nilradical de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$? de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?
- [S] 7 - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est réduit si et seulement si n est sans facteur carré.
- [S] 8 - Montrer que $\text{nil}(A)$ est un idéal de A , et que $A/\text{nil}(A)$ est réduit.
- [S] 9 - Si $u \in A^\times$ et $x \in \text{nil}(A)$, montrer que $u + x \in A^\times$. (Indication : traiter d'abord le cas $u = 1$).

Exercice 15 - (Anneaux locaux) Un anneau A est dit *local* s'il possède un unique idéal maximal.

- 1 - Un anneau nul est-il local ? Un corps est-il local ? À quelle condition sur $n \in \mathbb{N}$ l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est-il local ? Est-ce que tout sous-anneau d'un anneau local est local ? Est-ce que tout quotient d'un anneau local est local ?
- 2 - Si A est local d'idéal maximal J , montrer que $A^\times = A \setminus J$.
- 3 - Réciproquement, soit A un anneau tel que $A \setminus A^\times$ soit un idéal de A . Montrer que A est local.
- 4 - Soit K un corps. Montrer que l'anneau des séries formelles $K[[T]]$ est local.