Université de Rennes 1 - 2010-2011 - Master 1 de mathématiques - Module ALGB - Contrôle du 3/12/2010 - Durée : 1 heure

Documents, calculatrices et téléphones interdits. Barème indicatif.
Les anneaux et morphismes d'anneaux sont supposés unitaires.

Exercice 1 - (question de cours, 3 points) Soient k un corps et A une k-algèbre de dimension finie (comme k-espace vectoriel). Montrer que tout élément régulier de A est inversible.

Soit α un élément régulier de A. La multiplication par α définit un endomorphisme u du k-espace vectoriel A, qui est injectif parce que α est régulier. Comme $\dim_k A < +\infty$, u est donc surjectif et en particulier il existe $\beta \in A$ tel que $u(\beta) = 1$.
Remarque. L'énoncé ne précise pas que A est commutative. Le raisonnement ci-dessus montre en fait que si α est régulier à droite (resp. à gauche) il est inversible à droite (resp. à gauche). La plupart des réponses ont ignoré cette subtilité, et le correcteur aussi.

Mais en fait, la régularité à droite (par exemple) implique que α est inversible (des seux côtés) : en effet, α reste régulier à droite dans la sous-algèbre $B := k[\alpha]$, qui est commutative (et toujours de dimension finie) ; il suffit donc de raisonner dans B.

Exercice 2 - Pour chaque assertion ci-dessous (où k désigne un *corps quelconque*), on répondra, *sans justifier la réponse*, V si elle est (toujours) vraie, F si elle est (parfois) fausse, et A en cas d'abstention.

1- Toute sous-k-algèbre d'une extension de k est une extension de k.

FAUX, exemple : $k[X] \subset k(X)$.

2- Toute sous-k-algèbre, de dimension finie sur k, d'une extension de k est une extension de k.

VRAI : une telle algèbre est formée d'éléments algébriques et est intègre, donc est un corps.

3- Toute sous-k-algèbre d'une extension finie de k est une extension finie de k.

VRAI (cas particulier de la précédente).

4- Si α et β sont deux éléments d'une extension de k, avec α algébrique sur k et $2\beta^2 = 1+\alpha$, alors β est algébrique sur k.

FAUX (mais vrai si $\operatorname{car} k \neq 2$) : en caractéristique 2, on sait seulement que $\alpha = 1$, et on n'a aucune information sur β.

5- Soient B une k-algèbre, A une sous-k-algèbre de B, $\alpha \in A$ algébrique sur k. Si $\alpha \in B^\times$, alors $\alpha \in A^\times$.

VRAI : α est régulier dans B, donc dans A, donc inversible dans A puisqu'il est algébrique.

Exercice 3 - Soit α le nombre complexe $\sqrt{5}+i$. On pose $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, $L = \mathbb{Q}(i)$, $E = \mathbb{Q}(\alpha)$. Il pourra être utile de calculer $\alpha\,\overline{\alpha}$.

1- Montrer que $K \underset{\neq}{\subset} E$ et $L \underset{\neq}{\subset} E$, et que $E = \mathbb{Q}(i, \sqrt{5})$. (On pourra remarquer que $i \notin K$).

On a $\alpha\,\overline{\alpha} = 6$, donc $\overline{\alpha} = 6/\alpha \in E$. Donc $\sqrt{5} = \frac{1}{2}(\alpha + \overline{\alpha})$ et $i = \frac{1}{2}(\alpha - \overline{\alpha})$ sont aussi dans E, ce qui implique que $K \subset E$ et $L \subset E$, et donc que $\mathbb{Q}(i, \sqrt{5}) \subset E$; comme il est clair que $\alpha \in \mathbb{Q}(i, \sqrt{5})$ on a l'égalité $E = \mathbb{Q}(i, \sqrt{5})$.

D'autre part $i \notin \mathbb{R}$ donc $i \notin K$, donc $E \neq K$; par suite $[E:\mathbb{Q}] > [K:\mathbb{Q}] = 2$ donc $E \neq L$.

2- Trouver le polynôme minimal unitaire P de α sur $\mathbb{Q}$, et le degré de E sur $\mathbb{Q}$. (On doit trouver que $P(X) = P(-X)$ et que $P(1) = 29$).

La relation $(\alpha - i)^2 = 5$ implique, en développant, que $2i\alpha = \alpha^2 - 6$ d'où, en élevant au carré et en simplifiant, $\alpha^4 - 8\alpha^2 + 36 = 0$, de sorte que P divise $X^4 - 8X^2 + 36$. Mais d'autre part, le degré de P est $[E:\mathbb{Q}] = [E:K][K:\mathbb{Q}] = 2[E:K]$ donc est pair ; en outre on a vu que $[E:\mathbb{Q}] > 2$, donc $[E:\mathbb{Q}] = \deg P = 4$ et $P = X^4 - 8X^2 + 36$.

3- Quelles sont les racines de P dans $\mathbb{C}$? dans E ?

Comme P est réel et pair, et que $P(\alpha) = 0$, les 4 nombres (distincts) $\{\pm\alpha, \pm\overline{\alpha}\} = \{\pm\sqrt{5}\pm i\}$ sont aussi racines ; ce sont donc les racines de P dans $\mathbb{C}$, et dans E.

4- Quel est le polynôme minimal de α sur K ? (On pourra utiliser la question précédente).

Le polynôme $(X-\alpha)(X-\overline{\alpha}) = X^2 - 2\sqrt{5}X + 6 \in K[X]$ annule α, et est de degré $2 = [E:K]$ donc est le polynôme minimal de α sur K.