Université de Rennes 1 - 2010-2011 - Master 1 de mathématiques - Module ALGB - Contrôle du 3/12/2010 - Durée : 1 heure

Documents, calculatrices et téléphones interdits. Barème indicatif.

Exercice 1 - (question de cours, 3 points) Soient k un corps et A une k-algèbre de dimension finie (comme k-espace vectoriel). Montrer que tout élément régulier de A est inversible.

Exercice 2 - Pour chaque assertion ci-dessous (où k désigne un *corps quelconque*), on répondra, *sans justifier la réponse*, V si elle est (toujours) vraie, F si elle est (parfois) fausse, et A en cas d'abstention.
Barème : 1 par réponse correcte, -1 par réponse incorrecte, 0 en cas d'abstention.

Ne répondez qu'à coup sûr ! !

1- Toute sous-k-algèbre d'une extension de k est une extension de k.

2- Toute sous-k-algèbre, de dimension finie sur k, d'une extension de k est une extension de k.

3- Toute sous-k-algèbre d'une extension finie de k est une extension finie de k.

4- Si α et β sont deux éléments d'une extension de k, avec α algébrique sur k et $2\beta^2 = 1 + \alpha$, alors β est algébrique sur k.

5- Soient B une k-algèbre, A une sous-k-algèbre de B, $\alpha \in A$ algébrique sur k. Si $\alpha \in B^\times$, alors $\alpha \in A^\times$.

Exercice 3 - (12 points) Soit α le nombre complexe $\sqrt{5} + i$. On pose $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, $L = \mathbb{Q}(i)$, $E = \mathbb{Q}(\alpha)$. Il pourra être utile de calculer $\alpha\,\overline{\alpha}$.

1- Montrer que $K \underset{\neq}{\subset} E$ et $L \underset{\neq}{\subset} E$, et que $E = \mathbb{Q}(i, \sqrt{5})$. (On pourra remarquer que $i \notin K$).

2- Trouver le polynôme minimal unitaire P de α sur $\mathbb{Q}$, et le degré de E sur $\mathbb{Q}$. (On doit trouver que $P(X) = P(-X)$ et que $P(1) = 29$).

3- Quelles sont les racines de P dans $\mathbb{C}$? dans E ?

4- Quel est le polynôme minimal de α sur K ? (On pourra utiliser la question précédente).