Université de Rennes 1 - 2010-2011 - Master 1 de mathématiques - Module ALGB - Corigé du contrôle du 5/11//2010 - Durée : 1 heure

Exercice 1 - (question de cours, 3+5 points)
1- Donner la définition d'un anneau principal.

Un anneau A est principal s'il est intègre et si tout idéal de A est principal (c'est-à-dire engendré par un élément).

Erreur la plus fréquente : oubli de la condition « intègre ».

2- Montrer que tout anneau euclidien est principal.

Soit A un anneau euclidien et soit $\delta : A \to \mathbb{N}$ une jauge euclidienne sur A. Comme A est intègre par définition, il reste à voir que tout idéal de A est principal. Soit donc I un idéal de A. Distinguons deux cas :

Premier cas : $I = \{0\}$. Alors I est engendré par 0.

Deuxième cas : $I \neq \{0\}$. L'image de $I \setminus \{0\}$ par δ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ donc a un plus petit élément. Autrement dit, il existe $\alpha \in I$ tel que

$$\alpha \neq 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in I \setminus \{0\}, \delta(\alpha) \leq \delta(x).$$

Montrons alors que $I = \alpha A$. Il est clair que $\alpha A \subset I$ puisque $\alpha \in I$. Réciproquement, soit $x \in I$ et montrons que α divise x. Par division euclidienne (licite car $\alpha \neq 0$), on a $x = \alpha q + r$ avec q et r dans A et $\delta(r) < \delta(\alpha)$. Mais on a $r = x - q\alpha \in I$ puisque I est un idéal contenant α et x. Vu le choix de α, on a nécessairement $r = 0$, donc $x = q\alpha$. CQFD.

Erreurs les plus fréquentes :

- beaucoup de confusion dans le choix de l'élément α : j'ai trouvé « élément de I de jauge minimale » (c'est 0), « élément de I de jauge non nulle minimale » (alors que la définition d'une jauge n'implique pas $\delta(0) = 0$), etc ;
- oubli de vérifier, dans la division euclidienne, que le diviseur α n'est pas nul ;
- certains ont remarqué que l'existence des PGCD avec identité de Bézout (valables dans un anneau euclidien, grâce à l'algorithme d'Euclide) entraîne que tout idéal engendré par deux éléments est principal et donc (par récurrence) que tout idéal engendré par n éléments ($n \in \mathbb{N}$) est aussi principal. En d'autres termes, tout idéal *de type fini* est principal ; cependant cela ne suffit pas à conclure, et d'ailleurs il existe des anneaux intègres non principaux ayant cette propriété.

Exercice 2 - Pour chaque assertion ci-dessous, on répondra, *sans justifier la réponse*, V si elle est (toujours) vraie, F si elle est (parfois) fausse, et A en cas d'abstention.
Barème : 1 par réponse correcte, -1 par réponse incorrecte, 0 en cas d'abstention.

1- Tout sous-anneau d'un anneau principal est principal : ________ V $\boxed{\text{F}}$ A

2- L'anneau $\mathbb{Z}[X]$ est euclidien : ________ V $\boxed{\text{F}}$ A

3- Le produit de deux anneaux principaux est principal : ________ V $\boxed{\text{F}}$ A

Dans les questions 4 et 5 on note a, b, c trois éléments non nuls d'un anneau principal.

4- Si $\mathrm{PGCD}(a, b, c) = 1$, alors $\mathrm{PPCM}(a, b, c) = abc$: ________ V $\boxed{\text{F}}$ A

5- Si $\mathrm{PPCM}(a, b, c) = abc$, alors $\mathrm{PGCD}(a, b, c) = 1$: ________ $\boxed{\text{V}}$ F A

Exercice 3 - (5 points) Soient A un anneau *euclidien* et n un entier naturel. On considère les sous-groupes suivants du groupe $\mathrm{GL}_n(A)$ des matrices carrées d'ordre n inversibles à coefficients dans A :
- le groupe $\mathrm{E}_n(A)$ engendré par les matrices élémentaires ;
- le groupe $\mathrm{SL}_n(A)$ des matrices de déterminant 1 ;
- le groupe $\mathrm{D}_n(A)$ des matrices diagonales $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ où les λ_i sont dans $A^\times$;
- le groupe $\mathrm{SD}_n(A) := \mathrm{D}_n(A) \cap \mathrm{SL}_n(A)$.

Montrer que $\mathrm{GL}_n(A)$ est engendré par $\mathrm{E}_n(A) \cup \mathrm{D}_n(A)$, et que $\mathrm{SL}_n(A)$ est engendré par $\mathrm{E}_n(A) \cup \mathrm{SD}_n(A)$.

Soit $U \in \mathrm{GL}_n(A)$. Comme A est euclidien, on peut écrire $U = PDQ$ où P et Q sont dans $\mathrm{E}_n(A)$ et où $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est une matrice diagonale (de Smith, mais peu importe ici). De plus $D = P^{-1}UQ^{-1}$ est inversible, donc les λ_i sont dans $A^\times$ et $D \in \mathrm{D}_n(A)$. Donc U appartient au sous-groupe engendré par $\mathrm{E}_n(A) \cup \mathrm{D}_n(A)$.

Le sous-groupe engendré par $\mathrm{E}_n(A) \cup \mathrm{SD}_n(A)$ est contenu dans $\mathrm{SL}_n(A)$ (puisque celui-ci contient $\mathrm{E}_n(A)$ et $\mathrm{SD}_n(A)$). Réciproquement, si l'on applique le raisonnement précédent avec $U \in \mathrm{SL}_n(A)$, on trouve en outre que $D \in \mathrm{SL}_n(A)$ (puisque P, U et Q sont dans $\mathrm{SL}_n(A)$). Comme on sait déjà que $D \in \mathrm{D}_n(A)$, on conclut que $D \in \mathrm{SD}_n(A)$. CQFD.

Exercice 4 - (2 points) Écrire une procédure Maple qui retourne la liste des diviseurs premiers d'un entier n donné (supposé strictement positif).

```
divp :=proc(n)
local i, L;
L :=[ ];
for i from 1 to n do
if (n mod i=0) and isprime(i) then
L :=[op(L),i];
fi;
od;
L;
end;
```