Université de Rennes 1 - 2010-2011 - Master 1 de mathématiques - Module ALGB - Contrôle du 5/11/2010 - Durée : 1 heure

Documents, calculatrices et téléphones interdits. Barème indicatif.
Les anneaux et morphismes d'anneaux sont supposés unitaires.

Exercice 1 - (question de cours, 3+5 points)
1- Donner la définition d'un anneau principal.
2- Montrer que tout anneau euclidien est principal.

Exercice 2 - Pour chaque assertion ci-dessous, on répondra, *sans justifier la réponse*, V si elle est (toujours) vraie, F si elle est (parfois) fausse, et A en cas d'abstention.
Barème : 1 par réponse correcte, -1 par réponse incorrecte, 0 en cas d'abstention.

Ne répondez qu'à coup sûr ! !

1- Tout sous-anneau d'un anneau principal est principal.
2- L'anneau $\mathbb{Z}[X]$ est euclidien.
3- Le produit de deux anneaux principaux est principal.

Dans les questions 4 et 5 on note a, b, c trois éléments non nuls d'un anneau principal.

4- Si $\mathrm{PGCD}(a,b,c) = 1$, alors $\mathrm{PPCM}(a,b,c) = abc$.
5- Si $\mathrm{PPCM}(a,b,c) = abc$, alors $\mathrm{PGCD}(a,b,c) = 1$.

Exercice 3 - (5 points) Soient A un anneau *euclidien* et n un entier naturel. On considère les sous-groupes suivants du groupe $\mathrm{GL}_n(A)$ des matrices carrées d'ordre n inversibles à coefficients dans A :

- le groupe $\mathrm{E}_n(A)$ engendré par les matrices élémentaires ;
- le groupe $\mathrm{SL}_n(A)$ des matrices de déterminant 1 ;
- le groupe $\mathrm{D}_n(A)$ des matrices diagonales $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ où les λ_i sont dans $A^\times$;
- le groupe $\mathrm{SD}_n(A) := \mathrm{D}_n(A) \cap \mathrm{SL}_n(A)$.

Montrer que $\mathrm{GL}_n(A)$ est engendré par $\mathrm{E}_n(A) \cup \mathrm{D}_n(A)$, et que $\mathrm{SL}_n(A)$ est engendré par $\mathrm{E}_n(A) \cup \mathrm{SD}_n(A)$.

Exercice 4 - (2 points) Écrire une procédure Maple qui retourne la liste des diviseurs premiers d'un entier n donné (supposé strictement positif).