Université de Rennes 1 - 2010-2011 - Master 1 de mathématiques - Module ALGB - Corigé du contrôle du 1/10/2010 - Durée : 1 heure

Exercice 1 - Pour chaque assertion ci-dessous (où A désigne un anneau quelconque), on répondra, *sans justifier la réponse*, V si elle est (toujours) vraie, F si elle est (parfois) fausse, et A en cas d'abstention.
Barème : 1 par réponse correcte, -1 par réponse incorrecte, 0 en cas d'abstention.

1 - Il existe un morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}$ dans A :	$\boxed{\text{V}}$	F	A
2 - Il existe un morphisme d'anneaux de A dans $\mathbb{Z}$:	V	$\boxed{\text{F}}$	A
3 - Il existe un morphisme d'anneaux de l'anneau nul dans A :	V	$\boxed{\text{F}}$	A
4 - Il existe un morphisme d'anneaux de A dans l'anneau nul :	$\boxed{\text{V}}$	F	A
5 - Tout sous-anneau d'un anneau intègre est intègre :	$\boxed{\text{V}}$	F	A
6 - Tout anneau quotient d'un corps est un corps :	V	$\boxed{\text{F}}$	A
7 - Tout sous-groupe d'un groupe infini est infini :	V	$\boxed{\text{F}}$	A
8 - Tout sous-anneau de $\mathbb{R}$ est infini :	$\boxed{\text{V}}$	F	A
9 - Le nombre $\frac{6}{3072}$ appartient au sous-anneau de $\mathbb{Q}$ engendré par $\frac{1}{2}$:	$\boxed{\text{V}}$	F	A
10 - Le nombre $\frac{6}{3072}$ appartient à l'idéal de $\mathbb{Q}$ engendré par $\frac{1}{2}$:	$\boxed{\text{V}}$	F	A

Exercice 2 - (2 points) Soient A un anneau et x un élément de A. Montrer (à partir de la définition d'un anneau) que $0x = 0$. (Suggestion : additionner $0x$ à un élément convenable).

On a $0x + 0x = (0 + 0)x = 0x = 0 + 0x$ d'où $0x = 0$ par simplification additive.

Exercice 3 - (3 points) Soit A un anneau. On suppose que A est le seul sous-anneau de A. Montrer que A est isomorphe à un quotient de $\mathbb{Z}$.

L'unique morphisme d'anneaux $\varphi : \mathbb{Z} \to A$ a pour image un sous-anneau de A, donc il est surjectif d'après l'hypothèse, donc A est isomorphe à $\mathbb{Z}/\ker\varphi$.

Exercice 4 - (5 points) Soit A l'anneau $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions réelles continues sur $\mathbb{R}$ (avec l'addition et la multiplication habituelles). On note $\circ$ la composition des applications.
Les questions 1 et 2 sont indépendantes.
1 - Est-ce que $(\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \circ)$ est un anneau ? Si oui, est-il commutatif ?

Ce n'est pas un anneau car la formule $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$ est fausse en général (exemple : $f =$ la constante 1, g et h quelconques). La question de la commutativité est donc sans objet (cependant, à toutes fins utiles, $\circ$ n'est pas commutative : les constantes 0 et 1 ne commutent pas). (Les autres propriétés sont vraies ; en particulier l'élément neutre de $\circ$ est la fonction identité $x \mapsto x$).

2 - Soit $I := \{f \in A \mid f(1) = 0\}$. Montrer que I est un idéal de A, et que l'anneau A/I est isomorphe à $\mathbb{R}$. (On suggère de prouver les deux assertions en même temps).

L'application $\varphi : f \mapsto f(1)$ est un morphisme d'anneaux de A dans $\mathbb{R}$ (elle respecte addition et multiplication par définition des opérations sur les fonctions, et elle envoie la constante 1 sur le réel 1). Son noyau est I, qui est donc un idéal de A. Enfin φ est surjectif (un réel quelconque λ est image de la fonction constante λ), d'où par passage au quotient un isomorphisme de A/I sur $\mathbb{R}$.