Université de Rennes 1 - 2010-2011 - Master 1 de mathématiques - Module ALGB - Contrôle du 1/10/2010 - Durée : 1 heure

Nom et prénom :

Sauf dans l'ex. 1, les réponses seront justifiées, de manière complète et concise. Documents, calculatrices et téléphones interdits. Barème indicatif. Les anneaux et morphismes d'anneaux sont supposés unitaires.

Exercice 1 - Pour chaque assertion ci-dessous (où A désigne un anneau quelconque), on répondra, *sans justifier la réponse*, V si elle est (toujours) vraie, F si elle est (parfois) fausse, et A en cas d'abstention.
Barème : 1 par réponse correcte, -1 par réponse incorrecte, 0 en cas d'abstention.

Ne répondez qu'à coup sûr ! !

1 - Il existe un morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}$ dans A : ______ V F A
2 - Il existe un morphisme d'anneaux de A dans $\mathbb{Z}$: ______ V F A
3 - Il existe un morphisme d'anneaux de l'anneau nul dans A : ______ V F A
4 - Il existe un morphisme d'anneaux de A dans l'anneau nul : ______ V F A
5 - Tout sous-anneau d'un anneau intègre est intègre : ______ V F A
6 - Tout anneau quotient d'un corps est un corps : ______ V F A
7 - Tout sous-groupe d'un groupe infini est infini : ______ V F A
8 - Tout sous-anneau de $\mathbb{R}$ est infini : ______ V F A
9 - Le nombre $\frac{6}{3072}$ appartient au sous-anneau de $\mathbb{Q}$ engendré par $\frac{1}{2}$: ______ V F A
10 - Le nombre $\frac{6}{3072}$ appartient à l'idéal de $\mathbb{Q}$ engendré par $\frac{1}{2}$: ______ V F A

Exercice 2 - (2 points) Soient A un anneau et x un élément de A. Montrer (à partir de la définition d'un anneau) que $0x = 0$. (Suggestion : additionner $0x$ à un élément convenable).

Exercice 3 - (3 points) Soit A un anneau. On suppose que A est le seul sous-anneau de A. Montrer que A est isomorphe à un quotient de $\mathbb{Z}$.

(T.S.V.P.)

Exercice 4 - (5 points) Soit A l'anneau $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions réelles continues sur $\mathbb{R}$ (avec l'addition et la multiplication habituelles). On note $\circ$ la composition des applications.
Les questions 1 et 2 sont indépendantes.
1 - Est-ce que $(\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}),+,\circ)$ est un anneau ? Si oui, est-il commutatif ?
2 - Soit $I := \{f \in A \mid f(1) = 0\}$. Montrer que I est un idéal de A, et que l'anneau A/I est isomorphe à $\mathbb{R}$. (On suggère de prouver les deux assertions en même temps).