

## Introduction aux signaux aléatoires discrets TP N° I

Le but de ce TP est d'effectuer des manipulations de base sur des signaux simples. on devra simuler un signal déterministe et un signal aléatoire, les afficher, les additionner et les sauvegarder dans un fichier. Une introduction au filtrage linéaire (convolution) est proposée.

On définit les signaux  $X_1$ ,  $X_2$  et  $B$  suivants :

- On introduit le signal  $X_0$  :

$$X_0(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in \left\{0, 1, 2, \dots, \frac{L-1}{2}\right\}, L \text{ impair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- $X_1$  est un signal périodique de période  $L$

$$X_1(n) = \sum_{k \geq 0} A \cdot X_0(n - D - k \cdot L); 0 \leq D \leq \frac{L-1}{2}; A \geq 0$$

- $B$  est un signal aléatoire discret correspondant à ce qu'on appelle un bruit blanc discret : la suite  $(B(n))$ ,  $n$  entier est une suite de variables aléatoires (VA) décorrélées deux à deux de même moyenne  $m$  et de même variance  $\sigma^2$ .

- $X_2(n) = X_1(n) + B(n)$

### Manipulation

**Attention** : en matlab les indices d'un tableau doivent être des entiers supérieurs ou égaux à 1. Il faudra tenir compte de cette contrainte dans le codage en matlab des algorithmes intervenant ci-dessous et *s'en souvenir par la suite*.

I) Ecrire un programme matlab permettant de :

1. Saisir au clavier des valeurs pour  $A$ ,  $L$  et  $D$ .
2. Générer le signal  $X_1$  pour  $n \in \{0, 1, 2, \dots, 255\}$ .
3. Sauvegarder  $X_1$  dans un fichier de type texte (on sauvegardera l'abscisse et l'ordonnée de chaque point).
4. Lire le fichier et visualiser le résultat à l'écran.
5. Saisir au clavier des valeurs pour  $m$  et  $\sigma$  et générer, pour  $n \in \{0, 1, 2, \dots, 255\}$ , le signal  $B$  à l'aide du générateur de bruit aléatoire de la machine.

6. Visualiser  $B$ .
7. Générer  $X_2$  pour  $n \in \{0,1,2,\dots,255\}$  et le visualiser.
8. Imprimer les différents graphiques une fois toutes les étapes précédentes effectuées.

Créer une procédure matlab réalisant les mêmes opérations que le programme précédent avec comme paramètres d'entrée  $A, L, D, m, \sigma$ .

II) On a généré et visualisé, dans la première partie ce qu'on appelle un signal bruité, somme d'un signal "utile"  $X_1$  et d'un "bruit"  $B$ . Une opération classique, en traitement du signal, est de filtrer un tel signal pour atténuer le bruit au prix d'une légère déformation du signal utile. En appelant  $X_3$  la sortie d'un tel filtre et  $X$  son entrée, on aura :

$$X_3(n) = (H * X)(n) \quad (1)$$

Le choix de  $H$  correspond au choix d'un filtre linéaire et homogène. On considérera ici que  $X$  est nul pour  $n < 0$  (signal causal) et on prendra pour filtre :

$$H(n) = \begin{cases} \frac{1}{N} & \text{si } n \in \{0,1,2,\dots,N-1\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Ecrire en matlab un programme codant l'algorithme suivant pour générer  $X_3$  pour  $n \in \{0,1,2,\dots,255\}$  dans les cas où  $X = X_1$ ,  $X = B$  et  $X = X_2$  :

```
X, X3      tableau de réel;
X3(0) = X(0)/N;
pour n = 1 jusqu'à N - 1
faire
    X3(n) = X3(n-1) + X(n)/N;
refaire
pour n = N jusqu'à 255
faire
    X3(n) = X3(n-1) + (X(n) - X(n - N))/N;
refaire
```

La première boucle correspond au "régime transitoire" de la réponse au filtre, la deuxième boucle correspond au "régime permanent". Visualiser le résultat du filtrage dans chacun des cas. Une visualisation de  $X_3$  permettra d'apprécier la déformation apportée au signal utile et l'atténuation du bruit.

2) La fonction `conv` de matlab permet de réaliser l'opération de convolution entre deux suites à support borné codées sous forme de tableaux matlab (les suites devant donc

être codées sous forme de suites finies avec des valeurs d'indice supérieures ou égales à 1). Utiliser cette fonction dans un nouveau programme matlab réalisant le même travail que les programmes précédents.

**Recommandations :**

- Avant de commencer la programmation sur la machine, les programmes devront être étudiés 'sur le papier' avec commentaires.
- Pour des raisons d'homogénéité entre les binômes, il est fortement conseillé d'utiliser les identificateurs suivants :

<i>Théorique</i>	<i>Identificateur utilisé</i>
A, L, D	A, L, D
m, $\sigma$	m, sig
Bruit B	B
Signal sinusoïdal S	S
$X_0$	X0
$X_1$	X1
$X_2$	X2
$X_3$	X3

**Indications :**

- Le produit de convolution (1) s'écrit  $(H * X)(n) = \sum_k X(k) \cdot H(n - k)$  et dans le cas

du filtre  $H$  utilisé ici devient :  $X_3(n) = \frac{1}{N} \sum_{\max(0, n-N+1)}^n X(k)$ .

- Si  $X$  est une VA de loi équi-répartie (uniforme) sur un intervalle  $[a, b]$  (on écrit  $X \sim EQ(a, b)$ ), on a :

$$E[X] = \frac{a+b}{2} ; \text{VAR}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Si on introduit la VA  $Y = \alpha X + \beta$  alors  $Y \sim EQ(\alpha a + \beta, \alpha b + \beta)$ . On peut ainsi facilement transformer une VA  $X$  de loi uniforme sur  $[a, b]$  où  $a$  et  $b$  sont arbitraires en une VA  $Y$  de loi uniforme de moyenne  $m_Y$  et de variance  $\sigma_Y^2$  données. Il suffit de prendre  $\alpha$  et  $\beta$  tels que

$$m_Y = \alpha \cdot \frac{a+b}{2} + \beta \text{ et } \sigma_Y^2 = \alpha^2 \cdot \frac{(b-a)^2}{12}.$$