

Travaux Dirigés : Identification aveugle d'un système à phase non-minimale

Module de Traitement du Signal du Master 1 d'électronique

Laboratoire LTSI - UMR INSERM 642 - Université de Rennes1

Introduction

La connaissance du polyspectre (spectre d'ordre strictement supérieur à 2) de la sortie non-gaussienne d'un système Linéaire, Invariant en Temps (LIT) permet de reconstruire la réponse impulsionnelle du système sans connaissances a priori sur l'entrée du filtre. En d'autres termes, elle permet la *déconvolution aveugle* (ou *autodidacte*) de signaux non-gaussiens.

On suppose disposer d'une réalisation de longueur M d'un processus aléatoire discret $\{x[m]\}_{m \in \mathbb{Z}}$ tel que chaque variable aléatoire $x[m]$ suit le modèle suivant :

$$x[m] = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} H[\ell] s[m-\ell] + \nu[m] \quad (1)$$

où $\{s[m]\}_{m \in \mathbb{Z}}$ and $\{\nu[m]\}_{m \in \mathbb{Z}}$ représentent respectivement le processus d'entrée du filtre et le processus de bruit, et où :

$$H[m] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \check{H}(\omega) e^{i\omega m} d\omega \quad (2)$$

est le m -ième coefficient de la réponse impulsionnelle du système LIT dont la réponse en fréquence (appelée aussi *fonction de transfert*) est décrite par \check{H} . En outre, les hypothèses suivantes sont faites :

- A1).** $\{s[m]\}_{m \in \mathbb{Z}}$ est un processus i.i.d. (i.e. avec variables aléatoires *indépendamment* et *identiquement distribuées*), centré, non-gaussien et à valeurs complexes ;
- A2).** $\{\nu[m]\}_{m \in \mathbb{Z}}$ est centré, gaussien, stationnaire au sens large à l'ordre 3, à valeurs complexes et indépendant du processus source d'entrée du filtre ;
- A3).** Les cumulants d'ordre 3 du processus source sont tous absolument sommables et le spectre d'ordre 3 associé est non nul dans la bande du filtre ;
- A4).** Le système LIT étudié est stable (i.e. la réponse impulsionnelle H est absolument sommable, ce qui garantit l'existence d'une fonction de transfert bornée) avec une réponse impulsionnelle à valeurs complexes.

L'exercice de ce TD consiste à proposer une méthode de traitement du signal basée sur l'exploitation du spectre d'ordre 3 (qui sera défini plus loin) du processus $\{x[m]\}_{m \in \mathbb{Z}}$ afin de résoudre le problème suivant :

Problème 1 Soit $\check{H}(\omega) = |\check{H}(\omega)| e^{i\phi_H(\omega)}$ la fonction de transfert du système LIT étudié, identifier la phase ϕ_H du système et ce uniquement à partir d'une réalisation du processus $\{x[m]\}_{m \in \mathbb{Z}}$.

Questions

1) Soit $\{C_{2,x}^1[m, \tau_1, \tau_2]\}$ l'ensemble des cumulants d'ordre 3 du processus $\{x[m]\}_{m \in \mathbb{Z}}$, montrer que $\{x[m]\}_{m \in \mathbb{Z}}$ est stationnaire au sens large à l'ordre 3 en s'aidant de la définition de cumulants suivante :

Définition 1 Soit $\{x[m]\}_{m \in \mathbb{Z}}$ un processus aléatoire centré, ses cumulants d'ordre 2 et 3, notés respectivement $C_{1,x}^1[m, \tau]$ et $C_{2,x}^1[m, \tau_1, \tau_2]$, sont définis par $C_{1,x}^1[m, \tau] = \mathbb{E}[x[m]x[m + \tau]^*]$ et $C_{2,x}^1[m, \tau_1, \tau_2] = \mathbb{E}[x[m]x[m + \tau_1]x[m + \tau_2]^*]$.

ainsi que de la définition de stationnarité au sens large suivante :

Définition 2 Un processus aléatoire $\{x[m]\}_{m \in \mathbb{Z}}$ sera stationnaire au sens large si et seulement si les quantités $\mathbb{E}[x[m]]$, $C_{1,x}^1[m, \tau]$ et $C_{2,x}^1[m, \tau_1, \tau_2]$ ne dépendent pas de la variable m .

On exploitera également la propriété suivante :

Propriété 1 Les cumulants d'ordre strictement supérieur à 2 d'un processus aléatoire gaussien sont nuls.

2) Suite à la question précédente, nous pouvons omettre l'indice m et noter $C_{2,x}^1[\tau_1, \tau_2]$ le cumulants d'ordre 3 de $\{x[m]\}_{m \in \mathbb{Z}}$ associé au couple de retards (τ_1, τ_2) . Etablir alors la relation suivante :

$$C_{2,x}^1[\tau_1, \tau_2] = C_{2,s}^1[0, 0] \sum_{\ell_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{\ell_2 \in \mathbb{Z}} \sum_{\ell_3 \in \mathbb{Z}} H(\ell_1) H(\ell_2) H(\ell_3)^* \delta[\ell_1, \ell_2 - \tau_1, \ell_3 - \tau_2] \quad (3)$$

où $\delta[., ., .]$ désigne le symbole de Kronecker qui vaut 1 lorsque ses trois arguments sont égaux et 0 sinon.

3) Montrer ensuite l'expression suivante :

$$\Gamma_{2,x}^1(\omega_1, \omega_2) = C_{2,s}^1[0, 0] \check{H}(-\omega_1 - \omega_2) \check{H}(\omega_1) \check{H}(-\omega_2)^* \quad (4)$$

où $\Gamma_{2,x}^1$ désigne le spectre d'ordre 3 (appelé plus couramment *bispectre*) du processus $\{x[m]\}_{m \in \mathbb{Z}}$, i.e. la transformée de Fourier bidimensionnelle discrète de $C_{2,x}^1$ définie par :

$$\Gamma_{2,x}^1(\omega_1, \omega_2) = \sum_{\tau_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{\tau_2 \in \mathbb{Z}} C_{2,x}^1[\tau_1, \tau_2] e^{-i(\omega_1 \tau_1 + \omega_2 \tau_2)} \quad (5)$$

4) Puis mettre en évidence la relation entre la phase $\psi_{2,x}^1$ du bispectre $\Gamma_{2,x}^1$ de la sortie et la phase $\xi_{2,s}^1$ du cumulants $C_{2,s}^1[0, 0]$ de l'entrée. Nous considèrerons alors ces phases en des fréquences discrètes, i.e. aux points $\omega_i = (2\pi/N)k_i$ où $k_i \in \{0, \dots, N-1\}$ et prendrons de ce fait la convention d'écriture d'omettre le facteur $2\pi/N$.

5) Montrer que la fonction de transfert \check{H} est 2π -périodique (on calculera $\check{H}(\omega + 2\pi)$ en utilisant la définition de \check{H} en fonction de H) et que par conséquent la phase discrétisée de \check{H} , notée $\phi_H[.]$ au lieu de $\phi_H(.)$, est quant-à-elle N -périodique.

6) Par conséquent, que peut-on dire de la fonction qui à tout entier relatif α associe $\sum_{k=0}^{N-1} \phi_H[k + \alpha]$ est constante? Que peut-on alors dire de la somme $\sum_{k_2=0}^{N-1} (\phi_H[-k_1 - k_2] - \phi_H[k_2])$ où k_1 est un entier naturel inférieur à $N - 1$?

7) En supposant que l'on soit capable de résoudre le problème suivant :

Problème 2 Soit $\tilde{\psi}$ une fonction (appelée phase) de $\{0, 1, \dots, N-1\}^2$ dans $[-\pi, \pi]$, trouver le saut de phase J de $\{0, 1, \dots, N-1\}^2$ dans \mathbb{Z} tel que la phase déroulée $\tilde{\psi}^u$ donnée par :

$$\forall \mathbf{k} \in \{0, 1, \dots, N-1\}^2, \quad \tilde{\psi}^u(\mathbf{k}) = \tilde{\psi}(\mathbf{k}) + 2\pi J(\mathbf{k}) \quad (6)$$

soit la plus continue (lisse) possible.

proposer une estimée de la phase $\phi_H[.]$ de la fonction de transfert du système reposant sur l'expression de $\psi_{2,x}^1$ obtenue comme réponse à la question 4) et le résultat de la question précédente.

8) Une fois la phase $\phi_H[.]$ de $\check{H}(\cdot)$ estimée, comment pouvons-nous estimer le module $|\check{H}(\cdot)|$ de $\check{H}(\cdot)$ à partir du bispectre de $\{x[m]\}_{m \in \mathbb{Z}}$ (voir équation (4)) afin de reconstituer entièrement $\check{H}(\cdot) = |\check{H}(\cdot)| e^{i\phi_H(\cdot)}$?

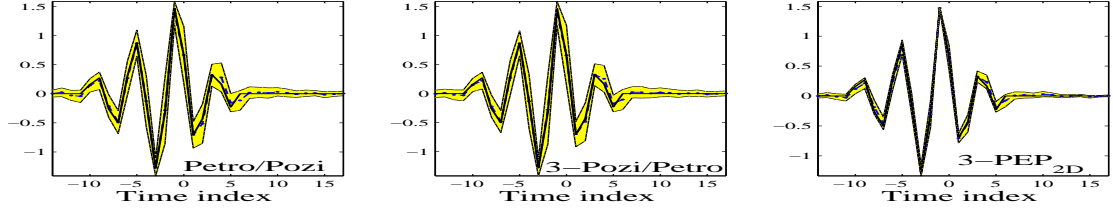


FIG. 1 – Phase recovery for 1024 samples and an exponential input distribution with a SNR of 15dB

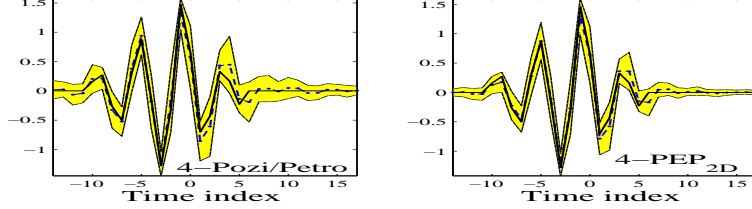


FIG. 2 – Phase recovery for 1024 samples and a symmetrical input distribution with a SNR of 15dB

Etude de performances

On présente ci-dessous des résultats de simulation où la méthode proposée ci-dessus, baptisée 3-PEP_{2D} [1], et son extension à l'ordre 4, nommée 4-PEP_{2D} [1], sont comparées en termes de performances à trois approches de référence : Petro/Pozi [2], 3-Pozi/Petro [3] exploitent l'information contenue dans le bispectre des données et 4-Pozi/Petro [3] qui utilise le trispectre des données. L'Erreur Quadratique Moyenne Normalisée (EQMN) définie par :

$$\text{EQMN} = \frac{\sum_{\ell=0}^{L-1} \mathbb{E}[(\hat{H}[\ell] - H[\ell])^2]}{\sum_{\ell=0}^{L-1} \mathbb{E}[H[\ell]^2]} = \frac{\sum_{\ell=0}^{L-1} (\text{Var}(\hat{H}[\ell]) + (\mathbb{E}[\hat{H}[\ell]] - H[\ell])^2)}{\sum_{\ell=0}^{L-1} \mathbb{E}[H[\ell]^2]} \approx \frac{\sum_{j=1}^J \sum_{\ell=0}^{L-1} (\hat{H}^{(j)}[\ell] - H[\ell])^2}{J \sum_{\ell=0}^{L-1} H[\ell]^2} \quad (7)$$

est ici employée afin d'évaluer les dites performances, où L , J , \hat{H} et $\hat{H}^{(j)}$ représentent respectivement la longueur de la réponse impulsionnelle H étudiée, le nombre d'estimations indépendantes utilisées pour estimer l'EQMN, l'estimateur de H et l'estimée de H obtenue lors de la j -ième estimation. En fait la phase estimée de la fonction de transfert du système est recombinaée au module exact de la dite fonction de transfert afin de reconstruire, par transformée de Fourier inverse, une pseudo-estimée \hat{H} de la réponse impulsionnelle H du filtre. En d'autres mots, de cette manière seule l'estimation de la phase est étudiée, ce que nous voulons en soit.

Les figures 1 et 2 données ci-dessous représentent en trait plein la réponse impulsionnelle exacte, en pointillé l'espérance mathématique de l'estimateur employé et en jaune la variance de cet estimateur. La figure 1 présentent les résultats des méthodes Petro/Pozi, 3-Pozi/Petro et 3-PEP_{2D} en présence d'un processus $\{s[m]\}_{m \in \mathbb{Z}}$ de loi exponentielle. La figure 2 offre quant-à-elle les résultats des algorithmes 4-Pozi/Petro et 4-PEP_{2D} en présence d'un processus source BPSK (Binary Phase Shift Keying) [4] qui n'est autre qu'une modulation numérique linéaire à deux états.

Etudions à présent l'effet i) du nombre d'échantillons et ii) du Rapport Signal à Bruit (RSB). Pour cela, considérons deux systèmes à phase non-minimale dont les réponses impulsionnelles respectives H_1 et H_2 vérifient respectivement :

$$\forall m \in \{-9, -8, \dots, 6\}, H_1[m] = 0.77^{|\frac{m}{2}|} \cos(0.49\pi m) + 0.8(0.65)^{|\frac{m}{2}|} \sin(0.38\pi + \frac{\pi}{5})$$

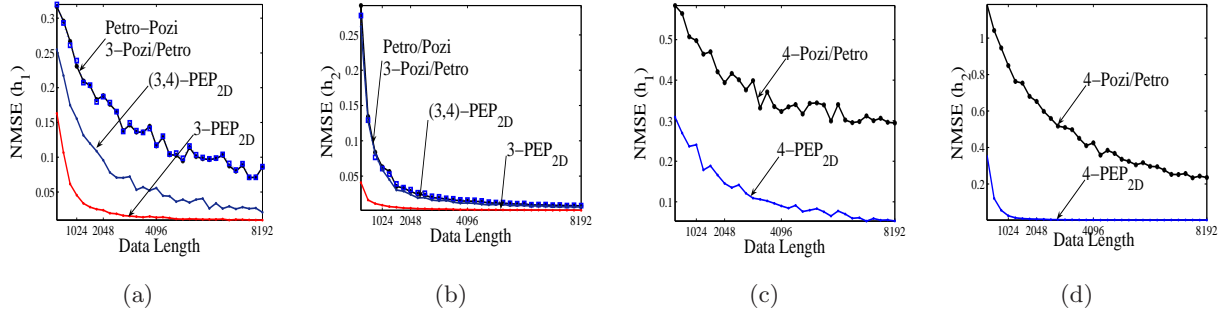


FIG. 3 – NMSE (EQMN en français) as a function of the data length : (a) and (b) for an exponential distribution and (c) and (d) for a BPSK.

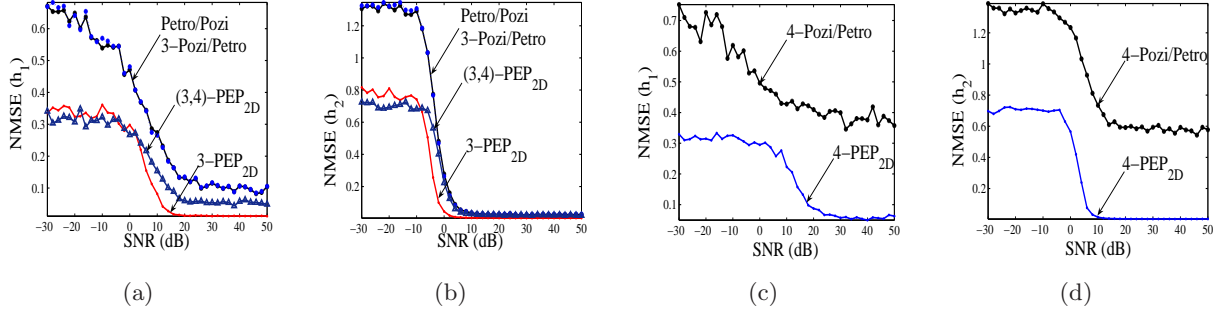


FIG. 4 – NMSE as a function of the SNR : (a) and (b) for an exponential distribution and (c) and (d) a BPSK.

et :

$$H_2(z) = 1 - 1.25z^{-1} + 1.75z^{-2} - 5.25z^{-3} - 12.5z^{-4} + 18z^{-5} + 9z^{-6} - 2.86e-6z^{-7} + 5.25z^{-8} + 0.75z^{-9} + 1.75z^{-10}$$

où H_1 et H_2 représentent respectivement les réponses impulsionnelles d'un filtre passe-bande et du canal *proakis-a*¹.

Ainsi, la figure 3 montre, pour un RSB de 15 dB, les performances des méthodes Petro/Pozi, 3-Pozi/Petro, 3-PEP_{2D}, 4-Pozi/Petro et 4-PEP_{2D} en fonction de la longueur de la réalisation de $\{x[m]\}_{m \in \mathbb{Z}}$ utilisée pour estimer la phase ϕ_H . Quant à la figure 4, elle présente, pour une réalisation longue de 2048 échantillons, les résultats des cinq méthodes cette fois en fonction du RSB.

Références

- [1] A. KACHENOURA, L. ALBERA, J.-J. BELANGER, and L. SENHADJI, "Non-minimum phase identification based on higher order spectrum slices," *IEEE Transactions On Signal Processing*, 2008, to appear.
- [2] A. P. PETROPULU and H. POZIDIS, "Phase reconstruction from bispectrum slices," *IEEE Transactions On Signal Processing*, vol. 46, no. 2, pp. 527–530, February 1998.
- [3] H. POZIDIS and A. P. PETROPULU, "System reconstruction based on selected regions of discretized higher order spectra," *IEEE Transactions On Signal Processing*, vol. 46, no. 12, pp. 3360–3377, December 1998.
- [4] J. G. PROAKIS, *Digital Communications, third edition*. New York : McGrawHill, 1995.

¹The discrete-time *proakis-a* channel is typical of the response of a good quality telephone channel [4].