

THERMOMÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

(Transformations Finies)

L.R. Rakotomanana

Cours pour DEA Mécanique

2002 - 2003

THERMOMÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS 1

TRANSFORMATIONS FINIES DES MILIEUX CONTINUS 7

Motivations 7

Problèmes : 7

Contexte de la mécanique classique 7

Hypothèses de continuité 8

Continuité de la matière 8

Continuité de la transformation 8

Transformations - Déformations 9

Transformation de lignes 10

Description en déplacement 11

Tenseur de déformation 12

Interprétation géométrique 13

Décomposition spectrale de la déformation 15

Racine d'un tenseur 16

Décomposition polaire (Cauchy) 17

Transformation de volumes 17

Transformation de surface 18

Compatibilité de la déformation 19

Compatibilité en déformations infinitésimales (De SAINT-VENANT) 19

Compatibilité de la déformation infinitésimale plane 20

Compatibilité en grandes transformations 21

Cinématique des milieux en transformations finies 25

Mouvement des points 25

Cinématique des fibres matérielles 27

Cinématique des volumes matériels 28

Cinématique des surfaces matérielles 30

Dérivée temporelle de grandeurs intégrales 31

Vitesse de transformation des quantités intégrales 31

Surface de discontinuité et théorème de transport 32

Notes 33

Fonctions d'allongement ("Stretching functions") 33

CONTRAINTES EN TRANSFORMATIONS FINIES 35

Lois de conservation 35

Vitesse - Accélération 35

Conservation de la masse : Équation de continuité 35

Equations dynamiques 36

Théorème de CAUCHY 37

Existence du tenseur de contrainte 37

Exemples de contraintes 40

Contraintes principales 41

Contrainte normale - Contrainte tangentielle 43

Tenseurs de contraintes en transformations finies 43

Contrainte nominale (PIOLA-KIRCHHOFF 1) 44

Contrainte matérielle (PIOLA-KIRCHHOFF 2) 46

Remarques 48

NOTIONS SUR LES LOIS DE COMPORTEMENT 49

Principe généraux des lois de comportement 49

Axiomes de NOLL 49

Objectivité (indifférence matérielle) 50

Contraintes 52

Puissance de déformation 53

Quelques classes de matériaux 53

Solides élastiques 54

Fluides visqueux 55

Solides viscoélastiques 57

Solides "non simples" 58

Exercices choisis 61

Exercice 1 61

Exercice 2 61

Exercice 3 61

Exercice 4 61

Exercice 5 62

Exercice 6 62

Exercice 7 63

Exercice 8 65

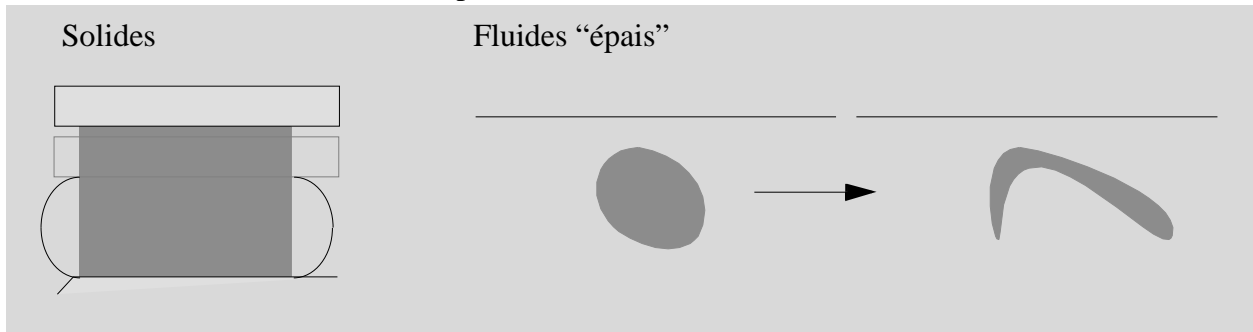
Exercice 9 65

Exercice 10 66

TRANSFORMATIONS FINIES DES MILIEUX CONTINUS

Motivations

Les phénomènes relevant des transformations finies sont nombreux et la théorie des déformations infinitésimales linéarisées ne suffit pas.



Problèmes :

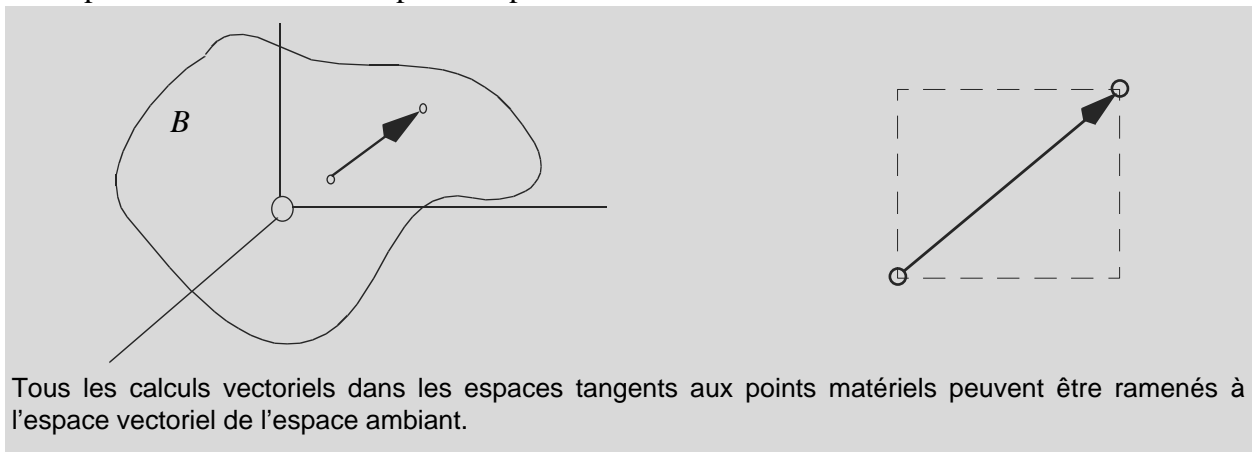
Quelles grandeurs utiliser pour décrire ces phénomènes (mouvement, déformation, contrainte, etc ...)?

Comment écrire les lois de la mécanique et thermomécanique qui gouvernent leur mouvement et déformation?

Contexte de la mécanique classique

Dans ce cours, nous considérons exclusivement des corps qui se déplacent à basse vitesse (sans effet de relativité) dans un espace-temps de la mécanique classique.

- espace découplé du temps, temps comparable à un paramètre
- existence d'un seul système de coordonnées cartésiennes pour tout l'espace
- espace vectoriel euclidien pour l'espace.



Tous les calculs vectoriels dans les espaces tangents aux points matériels peuvent être ramenés à l'espace vectoriel de l'espace ambiant.

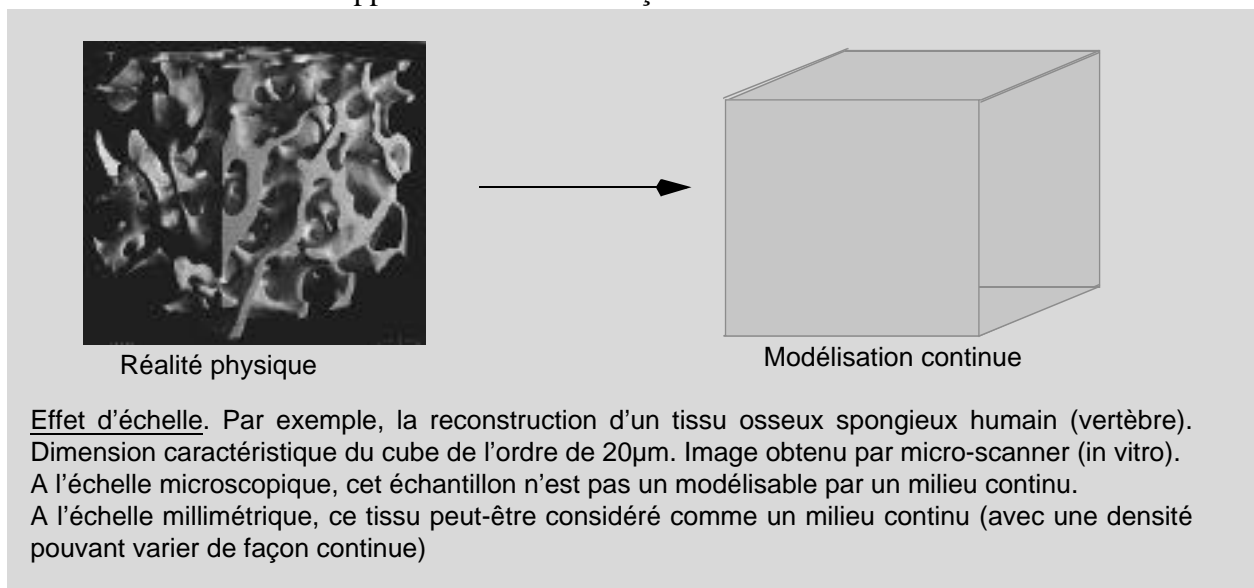
Hypothèses de continuité

Pour développer un modèle classique de milieu continu, on admet deux hypothèses de base :

- la continuité de la matière
- la continuité de la transformation

Continuité de la matière

Un milieu continu est un modèle de matériaux (solides, fluides, ...) dans lesquels les propriétés physiques sont supposées varier d'une façon continue d'un point à un autre. En particulier, la distribution de la masse est supposée varier d'une façon continue.



Un élément de volume dV renferme une masse de matière $dm = \rho(X) dV$ avec $\rho(X)$ la **masse volumique** variant de façon continue en fonction de la position du point X .

Continuité de la transformation

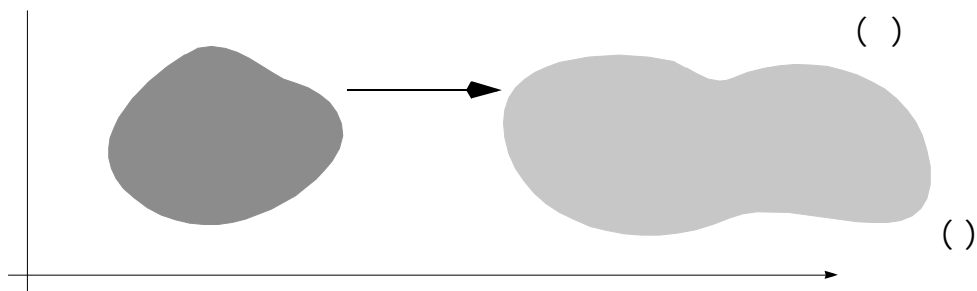
L'hypothèse de la continuité de la transformation (forte) de la matière stipule que deux points infiniment voisins $\{X, X'\}$ à l'instant initial t_0 restent infiniment voisins à tout autre instant ultérieur t . Deux points infiniment voisins à un instant quelconque t étaient infiniment voisins à tout autre instant antérieur. On définit le **placement** :

$$x = x(X, t) \quad x^i = x^i(X^1, X^2, X^3, t) \quad (\text{T-F 1})$$

dans laquelle X et x sont respectivement les coordonnées du point matériel considéré aux instants t_0 et t . La transformation est un homéomorphisme (de classe C^1 avec aussi une inverse de classe C^1) sur tout le corps B .

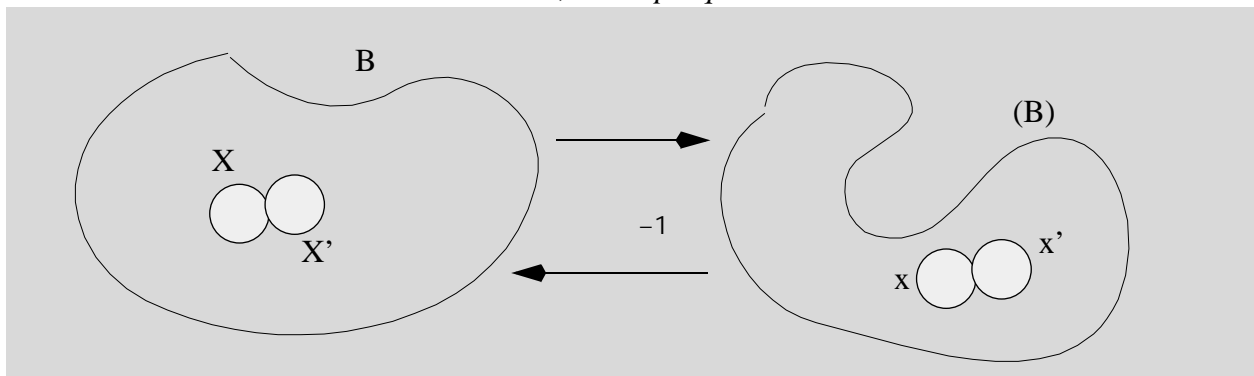
Conséquences de la continuité de la transformation :

(a) *L'hypothèse de continuité de la matière a pour conséquence directe :*



$$0 < J \quad \det \left[\frac{x^i}{X^I} \right] < \quad (\text{T-F 2})$$

(b) Des points matériels qui à l'instant initial t_0 forment un ensemble connexe (volume, surface ou courbe) forment encore un ensemble connexe (de même ordre) à tout autre instant ultérieur, et réciproquement.



(c) Les points matériels qui à l'instant initial t_0 se trouvent à l'intérieur d'une surface fermée restent à tout instant à l'intérieur de la surface transformée.

Conséquence 1 : La masse contenue dans une surface matérielle fermée reste constante au cours de la transformation.

Conséquence 2 : Les éléments matériels (points, courbes, surfaces) qui à l'instant initial t_0 forment la frontière d'un milieu continu en forment encore la frontière à tout autre instant.

Transformations - Déformations

Nous considérons un corps, modélisé par un milieu continu, (par la suite nous dirons un *milieu continu* tout court), avant et après déformation. La portion d'espace occupée par ce milieu est appelée *configuration* du milieu continu : configuration *initiale*, configuration *finale* (déformée). Une méthode classique en milieu continu soumis à des transformations finies est de considérer la configuration initiale avec un système de coordonnées (cartésiennes) induit par celui de l'espace

ambiant.

Transformation de lignes

La transformation (T-F 1) est en général non linéaire. Une analyse locale de la transformation, autour d'un point $x \in B$ est possible en effectuant un développement limité au premier ordre autour de $X \in B^{-1}$:

$$x(X + dX, t) = x(X, t) + (X, t)[dX] + o(|dX|) \tag{T-F 3}$$

En définissant le gradient de la transformation :

$$F = \frac{\partial x}{\partial X} \tag{T-F 4}$$

on peut écrire la relation fondamentale de la déformation avec $dX \in T_X B$ et $dx \in T_x(B)$:

$$dx = F(dX) \tag{T-F 5}$$

Cette relation peut être interprétée comme la transformation des fibres ou lignes matérielles avant déformation $dX = dX^I E_I$ et après déformation $dx = dx^i e_i$. Le gradient de la transformation F est aussi appelé transformation linéaire tangente.



(a) En effectuant analytiquement le développement limité, on aboutit à la forme en composantes et en la formulation matricielle la relation (T-F 5) :

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial X^I} dX^I$$

$$\begin{bmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial X^1} & \frac{\partial x^1}{\partial X^2} & \frac{\partial x^1}{\partial X^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial X^1} & \frac{\partial x^2}{\partial X^2} & \frac{\partial x^2}{\partial X^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial X^1} & \frac{\partial x^3}{\partial X^2} & \frac{\partial x^3}{\partial X^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dX^1 \\ dX^2 \\ dX^3 \end{bmatrix} \quad [] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial X^1} & \frac{\partial x^1}{\partial X^2} & \frac{\partial x^1}{\partial X^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial X^1} & \frac{\partial x^2}{\partial X^2} & \frac{\partial x^2}{\partial X^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial X^1} & \frac{\partial x^3}{\partial X^2} & \frac{\partial x^3}{\partial X^3} \end{bmatrix}$$

1. Le milieu continu est modélisé par une variété riemannienne B . Les fibres sont des éléments des espaces tangents dans la configuration initiale $dX \in T_X B$ et déformée $dx \in T_x(B)$.

(b) Une étude plus poussée permet de réécrire (T-F 5) sous forme “tensorielle”. Tout d’abord, rappelons ce qu’est un produit tensoriel. Le produit tensoriel de deux vecteurs a et b est un tenseur défini par :

$$(a \ b)v \ (b \ v)a \ v \tag{T-F 6}$$

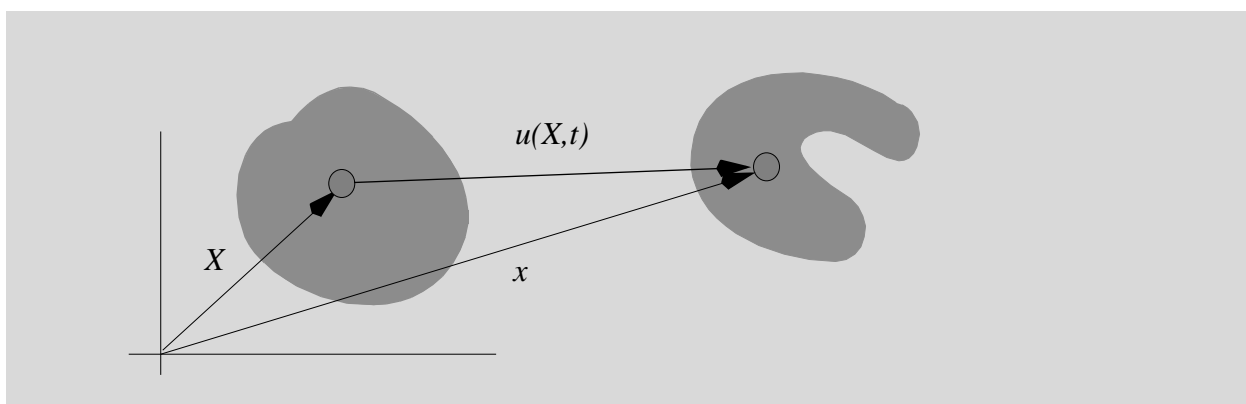
Ce qui nous permet de définir une liste des tenseurs de bases sur lesquels on peut décomposer le gradient de la transformation F . On en déduit la forme tensorielle du gradient de la transformation (T-F 5) ¹:

$$F = \frac{x}{X} = \frac{x^i e_i}{X^I} = \frac{x^i e_i}{X^I} E^I \tag{T-F 7}$$

$$F = \frac{x^1}{X^1} e_1 E^1 + \frac{x^2}{X^1} e_2 E^1 + \frac{x^3}{X^1} e_3 E^1 + \frac{x^1}{X^2} e_1 E^2 + \frac{x^2}{X^2} e_2 E^2 + \frac{x^3}{X^2} e_3 E^2 + \frac{x^1}{X^3} e_1 E^3 + \frac{x^2}{X^3} e_2 E^3 + \frac{x^3}{X^3} e_3 E^3$$

(c) $F = F(X, t)$ relie les espaces tangents $T_X B$ et $T_x (B)$

Description en déplacement



Le milieu continu est en mouvement dans un espace euclidien. On peut introduire un champ de

1. Le gradient d’un champ scalaire est une forme linéaire (élément de l’espace tangent dual $(T_X B)$) dont la décomposition est donnée par $= \frac{x^i}{X^I} E^I$.

vecteur déplacement. Le mouvement du milieu continu est alors décrit par le mouvement de chaque point par la transformation mais aussi par le vecteur déplacement de chaque point du milieu continu $X \in B$ défini par :

$$u(X, t) = (X, t) - (X, t_0) = x(X, t) - X \quad (\text{T-F 8})$$

On en déduit le gradient du déplacement :

$$u = F - I \quad F = I + u \quad (\text{T-F 9})$$

De même le gradient du déplacement s'écrit sous forme tensorielle :

$$u = \frac{u^i}{X^I} e_i \otimes E^I \quad (\text{T-F 10})$$

Quelques propriétés :

(a) F et u ne sont en général pas symétriques.

(b) F et u ne sont pas des tenseurs au sens rigoureux du terme. Les deux indices ne sont pas associés à la même base vectorielle : dX est un vecteur de la configuration initiale (espace tangent $dX \in T_X B$) tandis que dx est lié à la configuration déformée (espace tangent $dx \in T_x(B)$).

Tenseur de déformation

La déformation d'un vecteur convecté dans le milieu continu, c'est-à-dire se déformant totalement avec le milieu continu, est caractérisée par le changement de sa longueur durant la transformation. En utilisant le gradient de la transformation, on écrit ¹:

$$|dx|^2 - |dX|^2 = dX \cdot (F^T F - I)(dX) \quad (\text{T-F 11})$$

On en déduit la définition de la déformation de GREEN-LAGRANGE, en posant le tenseur de déformation de CAUCHY-GREEN $C = F^T F$:

$$E = \frac{1}{2}(C - I) \quad (\text{T-F 12})$$

Remarques :

(a) $E = E(X, t)$ est un champ de tenseur du second ordre (2-covariant) défini sur la configuration initiale avec $X \in B$.

(b) Les composantes du tenseur de déformation de GREEN-LAGRANGE dans la base matérielle (non déformée) s'écrivent dans la base $E^I \otimes E^J$:

1. Le tenseur transposé de S , noté S^T , est défini par : $S(u) \cdot v = u \cdot S^T(v)$, (u, v) . Un tenseur est symétrique si $S = S^T$ et antisymétrique si $S = -S^T$.

$$E_{IJ} = \frac{1}{2}(C_{IJ} - I_{IJ})$$

(c) La déformation (T-F 12) est indépendante des rotations rigides et des translations. Mouvement rigide : $x = x_0 + Q(t)(X - X_0)$, $u = u_0 + Q(t)(X - X_0)$

$$F = Q(t), \quad u = Q - I, \quad \text{d'où } E = 0 \bullet$$

(Q orthogonal si $Q(u) \cdot Q(v) = u \cdot v$, (u, v) , et alors $Q^T Q = I$).

(d) La déformation exprimée en termes de déplacement prend la forme :

$$E = \frac{1}{2}(u + u^T + u^T u) \quad (\text{T-F 13})$$

Par exemple, les composantes cartésiennes de la déformation s'écrivent (les i se confondent avec les I) :

$$E_{IJ} = \frac{1}{2} \frac{u^I}{X^J} + \frac{u^J}{X^I} + \frac{u^K}{X^I} \frac{u^K}{X^J}$$

(e) Cas de déformations infinitésimales. Pour les matériaux solides usuels comme l'acier, l'aluminium, l'os cortical, la céramique, la norme du gradient du déplacement reste faible $\|u\| = \sqrt{\text{tr } u^T u} \ll 1$, ce qui permet de proposer l'hypothèse des déformations infinitésimales et remplacer le tenseur de GREEN-LAGRANGE par le tenseur de déformation de CAUCHY :

$$E = \frac{1}{2}(u + u^T) \quad (\text{T-F 14})$$

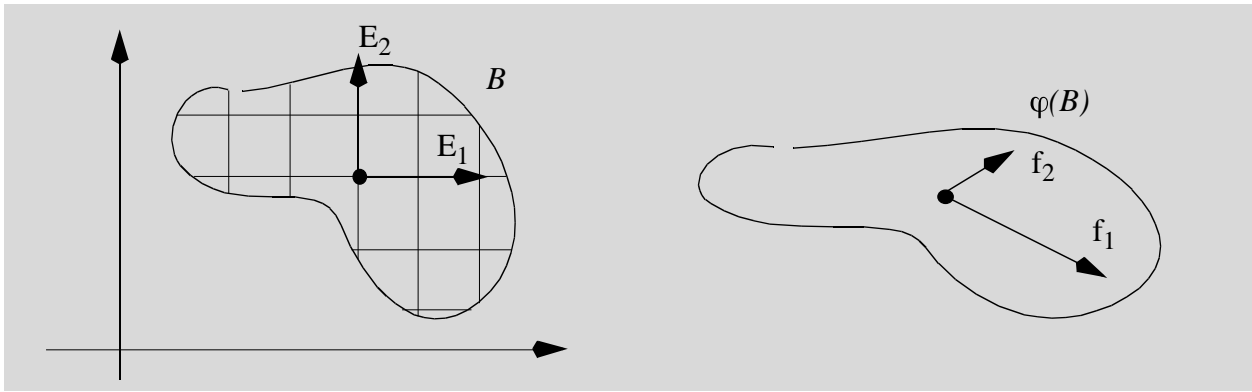
Pour une rotation rigide finie du MC, on a cependant :

$$E = \frac{1}{2}(Q + Q^T) - I \neq 0$$

Ainsi, on ne doit pas utiliser la déformation de CAUCHY pour des rotations finies même si les déformations sont infinitésimales!!!

Interprétation géométrique

A partir de la formule de transformation de fibres, on peut déduire la notion de base convectée par la transformation dans le milieu continu :

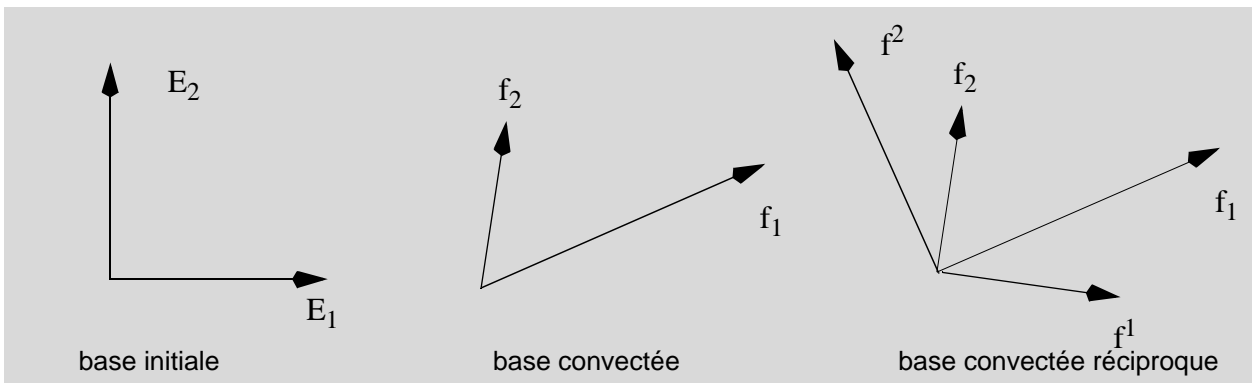


$$\begin{aligned}
 f_1 &= F(E_1) \\
 f_2 &= F(E_2) \\
 f_3 &= F(E_3)
 \end{aligned}
 \tag{T-F 15}$$

La base convectée $\{f_I \ T_x(B)\}$ est la transformée de la base initiale $\{E_I \ T_x B\}$ “tracée” à partir des directions d’un corps de référence, par exemple euclidien $\{e_i \ E\}$, dans le milieu à l’instant initial.

De l’hypothèse de continuité de la transformation, la transformée de la base initiale reste une base vectorielle au cours de la transformation. Elle peut être ni normée ni orthogonale!. La base réciproque de la base convectée (formée par des 1-formes linéaires $\{f^I \ (T_x(B))\}$) est définie par la relation :

$$f^J(f_I) = \delta^J_I
 \tag{T-F 16}$$



En utilisant la base convectée, une fibre matérielle infinitésimale garde les mêmes composantes matérielles au cours de la transformation du milieu continu:

$$dX = dX^I E_I \qquad dx = F(dX^I E_I) = dX^I f_I
 \tag{T-F 17}$$

Remarque. La place des indices est importante dans la description des grandes transformations. La relation (T-F 17) sera utilisée pour écrire les équations de compatibilité. Noter que le produit scalaire de deux vecteurs de la base convectée s’écrit :

$$C_{IJ} = f_I \cdot f_J
 \tag{T-F 18}$$

Ceci définit une matrice, celle du tenseur métrique projeté sur la base convectée :

$$[C] = [C_{IJ}] \tag{T-F 19}$$

Décomposition spectrale de la déformation

Un vecteur N est vecteur propre de C si il existe un scalaire λ , appelé valeur propre associée à N , telle que :

$$C(N) = \lambda N \tag{T-F 20}$$

- (a) $V_\lambda = \{v / (C(v) = \lambda v)\}$ est appelé espace caractéristique associé à λ .
- (b) $\dim V_\lambda$ est dite multiplicité de λ .
- (c) l'ensemble des valeurs propres $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ est le spectre de C (déformations principales)

Propriété : Les espaces caractéristiques d'un tenseur symétrique C sont mutuellement orthogonaux.

(Preuve) λ_1, λ_2 valeurs propres de C , alors $C(u) = \lambda_1 u$ et $C(v) = \lambda_2 v$

$$C(u) \cdot v = \lambda_1 u \cdot v = u \cdot C^T(v) = u \cdot C(v) = \lambda_2 u \cdot v$$

implique $u \cdot v = 0$.

Théorème de la décomposition spectrale. C symétrique, alors il existe une base orthonormée $\{N_1, N_2, N_3\}$ formée par les valeurs propres. Si $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ est le spectre, alors on peut écrire la décomposition spectrale du tenseur

$$C = \sum_{i=1,3} \lambda_i N_i \otimes N_i = \lambda_1 N_1 \otimes N_1 + \lambda_2 N_2 \otimes N_2 + \lambda_3 N_3 \otimes N_3 \tag{T-F 21}$$

Inversément, si l'on peut écrire (T-F 21) dans une base orthonormée $\{N_1, N_2, N_3\}$, alors $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ est le spectre de C relatif à cette base.

Remarques :

- (a) Les valeurs et directions propres définissent l'ellipsoïde des dilatations.
- (b) Les directions propres (axes principaux de la déformation) ne sont pas des fibres matérielles!

Pour la détermination des valeurs et vecteurs propres, soit C un tenseur du 2ème ordre et λ une valeur propre de C , c-à-d $(C - \lambda I)v = 0$,

Alors $\det(C - \lambda I) = -\lambda^3 + I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda + I_3 = 0$ avec

$$I_1 = \text{tr}(C) \tag{T-F 22}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}[\text{tr}^2 C - \text{tr}(C^2)] \tag{T-F 23}$$

$$I_3 = \det(C) \tag{T-F 24}$$

(I_1, I_2, I_3) sont les invariants principaux du tenseur C . Avec les valeurs propres, on a:

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, I_2 = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1, I_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

Racine d'un tenseur

C tenseur défini positif, vérifiant donc $v \cdot C(v) > 0, \forall v$, alors chaque valeur propre λ_i est positive:

(Preuve) valeur propre associée à N , alors $C(N) = \lambda N \Rightarrow N \cdot C(N) = \lambda N \cdot N = \lambda |N|^2 > 0$.

C tenseur symétrique défini positif, alors il existe (un et un seul) tenseur U symétrique, défini positif tel que :

$$U^2 = C \tag{T-F 25}$$

Le tenseur U est appelé racine de C et est noté $U = \sqrt{C}$.

(Preuve) (Existence) De la décomposition spectrale $C = \sum \lambda_i N_i \otimes N_i$, on peut définir un tenseur $U = \sum \sqrt{\lambda_i} N_i \otimes N_i$ qui vérifie:

$$U^2 = (\sum \sqrt{\lambda_i} N_i \otimes N_i)(\sum \sqrt{\lambda_j} N_j \otimes N_j) = \sum \lambda_i N_i \otimes N_i = C.$$

(Unicité) Soient U et V avec $U^2 = C$ et $V^2 = C$. Soient la valeur et vecteur propres associés λ et N . Posons $\lambda = \sqrt{\lambda}$, on a :

$$(C - \lambda I)N = (U^2 - \lambda I)N = (U + \lambda I) \underbrace{(U - \lambda I)N}_{=0} = 0$$

$(U + \lambda I)v = 0 \Rightarrow U(v) = -\lambda v, \forall v \neq 0$ sinon $-\lambda$ est valeur propre (négative) de U , ce qui est impossible.

D'où $U(N) = \lambda N$.

Similaire pour V , on a $V(N) = \lambda N$

Puisque ceci est vrai pour tout vecteur N donc pour chaque N_i , on déduit $U = V$.

Décomposition polaire (Cauchy)

Soit F un tenseur avec $\det(F) > 0$, alors il existe un tenseur U (et V) défini positif et une rotation R (tenseur orthogonale avec $\det(R) > 0$) tel que:

$$F = RU = VR \quad (\text{T-F 26})$$

Ces décompositions sont uniques et $U = \sqrt{F^T F}$, $V = \sqrt{FF^T}$.

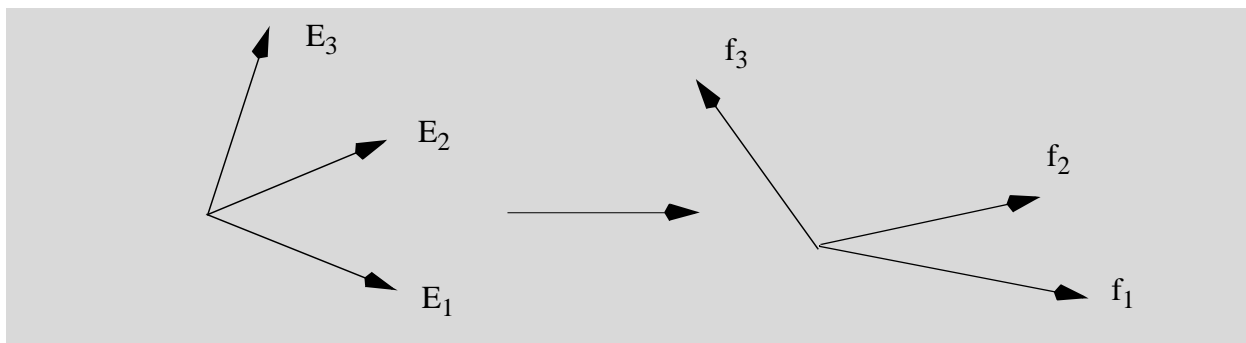
(Preuve) $F^T F$ et FF^T sont symétriques et sont définis positifs car :

$$\forall v \quad F^T F(v) = F(v) \quad F(v) > 0 \quad \text{et} \quad \forall v \quad FF^T(v) = F^T(v) \quad F^T(v) > 0$$

(Unicité) Si la décomposition $F = RU$ existe, alors $F^T F = UR^T RU = U^2$, il existe un seul tenseur U racine de $F^T F$. On en déduit également l'unicité de $R = FU^{-1}$. La démonstration est similaire pour V .

(Existence) Soit un tenseur U symétrique défini positif et $R = FU^{-1}$, alors $\det(R) = \det(FU^{-1}) > 0$. De plus, $R^T R = U^{-1} F^T F U^{-1} = I$, qui montre que R est une rotation. On a alors les relations:

$$V = RUR^T \quad \quad \quad VR = RU = F$$

Transformation de volumes

Pour une interprétation aisée, considérons la base initiale $\{E_1, E_2, E_3\}$ qui se transforme en la base convectée $\{f_1, f_2, f_3\}$. Les éléments de volume engendrés par ces bases, avant et après déformation, s'écrivent :

$$dV = (dX^1 E_1, dX^2 E_2, dX^3 E_3) = (E_1, E_2, E_3) dX^1 dX^2 dX^3 \quad (\text{T-F 27})$$

$$dv = (dX^1 f_1, dX^2 f_2, dX^3 f_3) = (f_1, f_2, f_3) dX^1 dX^2 dX^3 \quad (\text{T-F 28})$$

Ce qui nous donne directement la formule de transformation d'un élément de volume dans un milieu continu :

$$dv = \frac{(f_1, f_2, f_3)}{(E_1, E_2, E_3)} dV$$

$$dv = \det(F) dV \quad (\text{T-F 29})$$

Une transformation finie isovolume satisfait localement la relation :

$$J - 1 = 0 \quad (\text{T-F 30})$$

Cas des déformations infinitésimales. L'approximation des déformations infinitésimales donne (cf calcul tensoriel) :

$$\det F = \det(I + u) = 1 + \text{tr}(u) + 0(|u|^2)$$

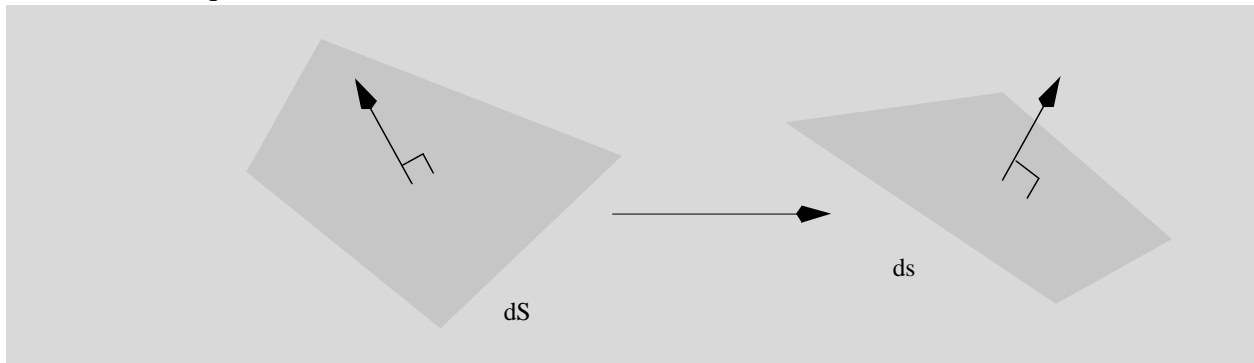
$$\det F = 1 + \text{div} u + 0(|u|^2)$$

Une transformation infinitésimale isovolume satisfait la relation :

$$\text{div}(u) = 0. \quad (\text{T-F 31})$$

Transformation de surface

La connaissance de la transformée d'un élément de surface est essentielle pour l'étude des contraintes mécaniques. Considérons un élément de surface se transformant avec le milieu continu.



Un élément de surface multiplié scalairement par un vecteur donne un élément de volume $dV = dS \cdot dL$ dont la transformée est:

$$dv = ds \cdot dl = ds \cdot F(dL) = F^T(ds) \cdot dL = J(dS \cdot dL)$$

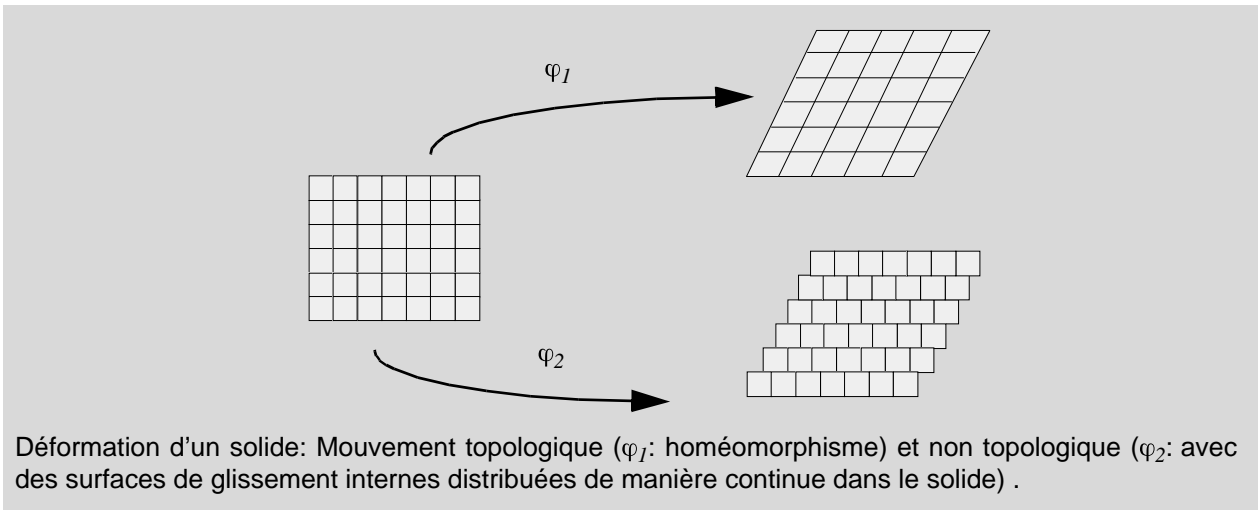
Pour un élément de longueur quelconque (non nul), on en déduit (Formule de NANSON):

$$ds = JF^{-T}(dS) \quad (\text{T-F 32})$$

Souvent, l'introduction d'un vecteur normal unité dans les deux configurations initiale et déformée permet de réécrire (T-F 32) :

$$nda = JF^{-T}(N)dA \tag{T-F 33}$$

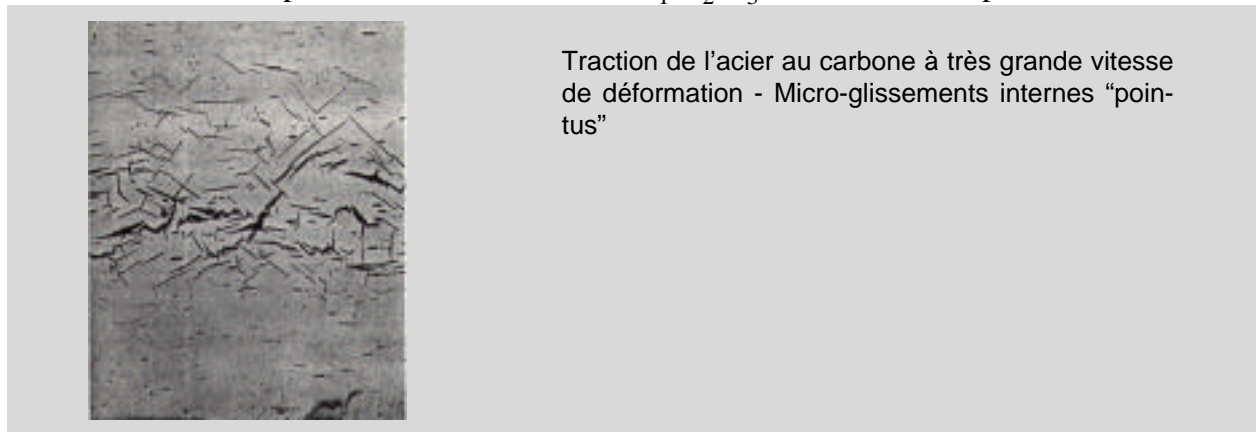
Compatibilité de la déformation



Etant donné un champ de déformation $E(X)$ défini sur un milieu continu, l'objectif de ce paragraphe est de donner les conditions pour que ce champ dérive d'un champ de déplacement. Dans le cas général, les éléments déformés ne forment pas un milieu continu car il y a inévitablement des micro-fissures ou des micro-trous dans volume. La compatibilité de la déformation consiste à respecter l'hypothèse de continuité la transformation du milieu continu.

Compatibilité en déformations infinitésimales (De SAINT-VENANT)

(Ce paragraphe est un rappel). Sur la figure, nous avons un exemple d'incompatibilité en déformations infinitésimales (et rotations infinitésimales) pour des Matériaux Fragiles. En déformations infinitésimales (et rotations infinitésimales), les coordonnées initiales (matérielles) et finales d'un même point matériel sont notées $\{x_1, x_2, x_3\}$. La translation peut être finie.



Sur le plan mathématique, la compatibilité s'écrit analytiquement sous-entendu que la déformation est connue et que les déplacements sont les inconnues :

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \frac{u_i}{x_j} + \frac{u_j}{x_i} \quad (\text{T-F 34})$$

Du point de vue mathématique, il y a trois composantes du déplacement et six composantes de la déformations. Etant donné un champ de déformation, il y a donc six équations (T-F 34) pour calculer le déplacement, ce qui montre qu'il y a trois équations qui sont "superflues". Les équations de compatibilité sont obtenues en écrivant les dérivées secondes de la déformation :

$$2 \frac{\partial^2 E_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \frac{u_i}{x_j} + \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \frac{u_j}{x_i} \quad (\text{T-F 35})$$

(a) le premier terme est symétrique en jl , la multiplication avec ϵ^{jln} doit être nulle:

$$\epsilon^{jln} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \frac{u_i}{x_j} = 0$$

Cette multiplication signifie que l'on peut permuter les indices jl sans changer le résultat.

(b) Le second terme est symétrique en ik , la multiplication avec ϵ_{ikm} doit être nulle:

$$\epsilon_{ikm} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \frac{u_j}{x_i} = 0$$

D'où la somme des deux termes (somme sur les indices i, j, k et l) :

$$\epsilon^{jln} \epsilon_{ikm} \frac{\partial^2 E_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} = 0 \quad (\text{T-F 36})$$

Les relations (T-F 36) sont appelées équations de compatibilité, elles se ramènent à six équations indépendantes pour les indices:

$$mn = 11, 22, 33, 12, 23, 31 \quad (\text{T-F 37})$$

Compatibilité de la déformation infinitésimale plane

La matrice du tenseur de déformation plane (par exemple dans le plan 12) est de la forme :

1. Le tenseur de permutation $\epsilon_{ijk} = -1, 0, 1$ si $\{i, j, k\}$ est une permutation anti-circulaire de $\{1, 2, 3\}$, si deux des indices sont égaux et si $\{i, j, k\}$ est une permutation circulaire de $\{1, 2, 3\}$ respectivement.

$$[E] = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{21} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{T-F 38})$$

Le nombre d'équations de compatibilité se ramènent à 9 :

$$(a) \ m = 1, n = 1 : \frac{{}^2 E_{22}}{x_3 \ x_3} = 0$$

$$(b) \ m = 1, n = 2 : \frac{{}^2 E_{21}}{x_3 \ x_3} = 0$$

$$(c) \ m = 1, n = 3 : \frac{{}^2 E_{21}}{x_3 \ x_2} - \frac{{}^2 E_{22}}{x_3 \ x_1} = 0$$

$$(d) \ m = 2, n = 1 : \frac{{}^2 E_{12}}{x_3 \ x_3} = 0$$

$$(e) \ m = 2, n = 2 : \frac{{}^2 E_{11}}{x_3 \ x_3} = 0$$

$$(f) \ m = 2, n = 3 : -\frac{{}^2 E_{11}}{x_3 \ x_2} + \frac{{}^2 E_{12}}{x_3 \ x_1} = 0$$

$$(g) \ m = 3, n = 1 : \frac{{}^2 E_{12}}{x_2 \ x_3} - \frac{{}^2 E_{22}}{x_1 \ x_3} = 0$$

$$(h) \ m = 3, n = 2 : -\frac{{}^2 E_{11}}{x_2 \ x_3} + \frac{{}^2 E_{21}}{x_1 \ x_3} = 0$$

$$(i) \ m = 3, n = 3 : \frac{{}^2 E_{11}}{x_2 \ x_2} - \frac{{}^2 E_{12}}{x_2 \ x_1} - \frac{{}^2 E_{21}}{x_1 \ x_2} + \frac{{}^2 E_{22}}{x_1 \ x_1} = 0$$

Compatibilité en grandes transformations

De même, considérons un exemple concret d'incompatibilité en transformations finies pour des

Matériaux Ductiles.



Traction d'alliage d'aluminium à grande vitesse de déformation - Micro-vides internes "ronds"

Remarque : En fait, les déformations au niveau mésoscopique sont rarement compatibles (micro-endommagement) même pour de faibles contraintes mais l'hypothèse de continuité de la transformation est souvent "acceptée" en introduisant d'autres variables internes modélisant ces microfissures ou micro-vides.

De même qu'en petites déformations, le déplacement a trois composantes et les relations déformations-déplacement sont au nombre de six. Il y a un surplus d'équations. Pourtant la méthode habituelle est trop longue à mettre en oeuvre. Une méthode plus géométrique consiste à utiliser la méthode de RIEMANN-CHRISTOFFEL en considérant la permutation de dérivées secondes d'un champ vectoriel.

Les équations d'incompatibilité sont développées en deux étapes pour les transformations finies.

Holonomie (Torsion nulle). En partant de la transformation finie (T-F 1), les coordonnées matérielles $\{X^1, X^2, X^3\}$ constituent également un système de coordonnées globales dans le milieu continu en état déformé. Donc, $dx = F(dX^I E_I) = dX^I f_I$ est un différentiel exact. Son intégral le long d'une courbe fermée quelconque est donc nul :

$$\int_C dX^I f_I = 0$$

L'application du théorème de STOKES nous donne (la surface entourée par la courbe est quelconque) :

$$\frac{f_I}{X^J} - \frac{f_J}{X^I} = 0 \quad (\text{T-F 39})$$

La condition (T-F 39) traduit le fait que le système de coordonnées $\{X^1, X^2, X^3\}$ est holonome. En géométrie différentielle, les dérivées des bases curvilignes sont décomposées dans la même base pour donner :

$$\frac{f_I}{X^J} = \frac{K}{IJ} f_K \quad (\text{T-F 40})$$

Les termes $\frac{K}{IJ}$ sont appelés coefficients de la connection entre les différents éléments de volumes

infinitésimaux du milieu continu. Ce ne sont pas les composantes d'un tenseur. Ce qui nous donne la condition d'holonomie :

$$\frac{K}{IJ} = \frac{K}{JI} \quad (\text{T-F 41})$$

Explicitement, il suffit d'exprimer les coefficients de connection en termes de composantes du tenseur de déformations :

$$C_{IJ} = f_I f_J$$

$$\frac{C_{IJ}}{X^N} = \frac{f_I}{X^N} f_J + f_I \frac{f_J}{X^N}$$

$$\frac{C_{IN}}{X^J} = \frac{f_I}{X^J} f_N + f_I \frac{f_N}{X^J}$$

$$\frac{C_{NJ}}{X^I} = \frac{f_N}{X^I} f_J + f_N \frac{f_J}{X^I}$$

$$\frac{K}{IJ} = \frac{1}{2} C^{KN} \frac{C_{IN}}{X^J} + \frac{C_{NJ}}{X^I} - \frac{C_{IJ}}{X^N} \quad (\text{T-F 42})$$

Courbure nulle. Considérons un champ de vecteur quelconque sur le milieu continu en grandes transformations et dérivons-le deux fois :

$$u(X) = u^L(X) f_L(X)$$

$$\frac{u}{X^M} = \frac{u^L}{X^M} f_L + u^L \frac{f_L}{X^M} = \frac{u^L}{X^M} f_L + u^L \frac{K}{LM} f_K \quad \text{avec} \quad \frac{f_L}{X^M} \quad \frac{K}{LM} f_K$$

On peut réécrire cette relation :

$$\frac{u}{X^M} = \frac{u^L}{X^M} + u^K \frac{L}{KM} f_L$$

La dérivée seconde s'écrit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X^N \partial X^M} = \frac{\partial}{\partial X^N} \left(\frac{\partial u^L}{\partial X^M} + u^K \frac{\partial}{\partial X^M} \frac{\partial f_L}{\partial X^K} \right) + \frac{\partial u^L}{\partial X^M} + u^K \frac{\partial}{\partial X^M} \frac{\partial f_L}{\partial X^K}$$

Tout développement fait, on trouve :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X^N \partial X^M} = \left[\frac{\partial}{\partial X^N} \frac{\partial u^L}{\partial X^M} + \frac{\partial u^K}{\partial X^N} \frac{\partial}{\partial X^M} \frac{\partial f_L}{\partial X^K} + u^K \frac{\partial}{\partial X^N} \frac{\partial}{\partial X^M} \frac{\partial f_L}{\partial X^K} \right] f_L + \frac{\partial u^L}{\partial X^M} + u^K \frac{\partial}{\partial X^M} \frac{\partial f_L}{\partial X^K}$$

Considérons maintenant la dérivée seconde croisée en indice MN :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X^M \partial X^N} = \left[\frac{\partial}{\partial X^M} \frac{\partial u^L}{\partial X^N} + \frac{\partial u^K}{\partial X^M} \frac{\partial}{\partial X^N} \frac{\partial f_L}{\partial X^K} + u^K \frac{\partial}{\partial X^M} \frac{\partial}{\partial X^N} \frac{\partial f_L}{\partial X^K} \right] f_L + \frac{\partial u^L}{\partial X^N} + u^K \frac{\partial}{\partial X^N} \frac{\partial f_L}{\partial X^K}$$

avec :

$$\frac{\partial f_L}{\partial X^N} = \frac{\partial}{\partial X^N} f_L \quad \frac{\partial f_L}{\partial X^M} = \frac{\partial}{\partial X^M} f_L$$

En effectuant la différence entre ces deux dérivées secondes croisées, nous aboutissons à la relation :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial X^N \partial X^M} - \frac{\partial^2 u}{\partial X^M \partial X^N} &= \left[\frac{\partial}{\partial X^N} \frac{\partial u^L}{\partial X^M} - \frac{\partial}{\partial X^M} \frac{\partial u^L}{\partial X^N} \right] f_L \\ &\quad + u^K \left(\frac{\partial}{\partial X^N} \frac{\partial}{\partial X^M} \frac{\partial f_L}{\partial X^K} - \frac{\partial}{\partial X^M} \frac{\partial}{\partial X^N} \frac{\partial f_L}{\partial X^K} \right) + \frac{\partial}{\partial X^N} \frac{\partial f_L}{\partial X^K} - \frac{\partial}{\partial X^M} \frac{\partial f_L}{\partial X^K} \end{aligned}$$

En partant d'un champ dont les dérivées secondes des composantes sont continues, donc l'ordre des dérivations est indifférent, la condition pour que la différence des dérivées secondes du champ vectoriel soit nulle est l'annulation des termes de la seconde ligne.

Ces termes représentent les composantes du tenseur de courbure de RIEMANN-CHRISTOFFEL.

$$\frac{\partial}{\partial X^N} \frac{\partial}{\partial X^M} \frac{\partial f_L}{\partial X^K} - \frac{\partial}{\partial X^M} \frac{\partial}{\partial X^N} \frac{\partial f_L}{\partial X^K} + \frac{\partial}{\partial X^M} \frac{\partial f_L}{\partial X^K} - \frac{\partial}{\partial X^N} \frac{\partial f_L}{\partial X^K} = 0 \quad (\text{T-F 43})$$

L'introduction de (T-F 42) dans les relations de compatibilités (T-F 43) sachant

que $C_{IJ} = 2E_{IJ} + \delta_{IJ}$ nous permet d'écrire les équations de compatibilité des grandes transformations des milieux continus en termes de déformations de CAUCHY-GREEN, ou en termes de la déformation de GREEN-LAGRANGE.

Le point le plus important dans ce processus est le fait de relier la notion de compatibilité des déformations avec la maintenance de l'équivalence affine du milieu continu avec l'espace euclidien lorsque les déformations sont compatibles. En cas de non compatibilité, il y a ce que l'on appelle les dislocations de VOLTERRA.

Remarques :

(a) Pour relier les compatibilités de de SAINT-VENANT et de RIEMANN-CHRISTOFFEL, on introduit le tenseur de courbure covariant :

$$R_{JKMQ} = C_{QL} R_{JKM}^L$$

Dans l'espace 3D (et seulement dans ce cas), ce tenseur totalement covariant se réduit à un tenseur du second ordre (tenseur d'EINSTEIN), dont les composantes contravariantes sont :

$$S^{AB} = \frac{1}{4} A^{JK} B^{MQ} R_{JKMQ}$$

En petites déformations, on obtient :

$$S_{ab} = - a_{jk} b_{li} \frac{\partial^2 E_{ki}}{\partial x^j \partial x^l}$$

L'annulation de cette relation donne (T-F 36). Ce développement a des points communs à celui de la relativité générale.

(b) Les variables (T-F 41) (torsion) et (T-F 43) (courbure) peuvent être choisies comme les grandeurs tensorielles qui mesurent les dislocations de translation et les dislocations de rotation.

Cinématique des milieux en transformations finies

Mouvement des points

Dans ce paragraphe, nous introduisons le facteur temps. Le mouvement (de classe C^1 avec une inverse de classe C^1 également) de chaque point du milieu continu $X \in B$ s'écrit:

$$x = (X, t) \quad x^i = x^i(X^1, X^2, X^3, t) \quad (\text{T-F 44})$$

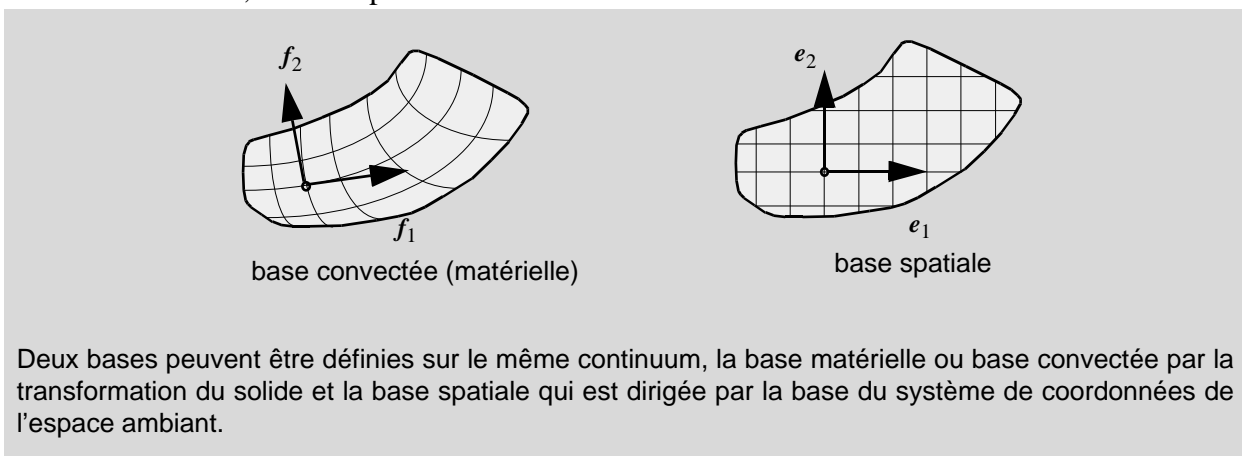
En choisissant les coordonnées matérielles $X = (X^1, X^2, X^3)$ de chaque point et le temps t comme variables indépendantes, on parle d'une description lagrangienne (description matérielle). Le champ de vitesse sur le milieu continu B est défini par la vitesse de chaque point matériel X :

$$v = \frac{\partial}{\partial t} (X, t) \quad v^i = \frac{\partial}{\partial t} x^i(X^1, X^2, X^3, t) \quad (\text{T-F 45})$$

Le champ d'accélération sur B est défini par l'accélération de chaque point X :

$$a = \frac{\partial}{\partial t} v(X, t) \quad a^i = \frac{\partial}{\partial t} v^i(X^1, X^2, X^3, t) \quad (\text{T-F 46})$$

Remarque. En mécanique des fluides, on adopte une autre description, appelée description eulérienne, qui considère non plus les coordonnées matérielles du point matériel comme variables indépendantes mais les coordonnées du point de l'espace $x(X, t)$ par lequel passe le point matériel X à l'instant t , et le temps t .



Dans ce cas, le calcul du champ de vitesse eulerien doit tenir compte du fait les points matériels qui passent par les points fixes de l'espace changent à chaque instant. Pour la vitesse et l'accélération, on a :

$$v(x, t) = v(X, t) = v(\text{ }^{-1}(x, t), t) \quad (\text{T-F 47})$$

$$a(x, t) = \frac{d}{dt} v(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} v(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} v(x, t) \frac{\partial}{\partial t} x(X, t) = \frac{\partial}{\partial t} v + \text{grad}(v)(v) \quad (\text{T-F 48})$$

En termes de composantes, le gradient (spatial) du champ de vitesse $v(x, t) = v^i(x^1, x^2, x^3, t)e_i$ s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x} v(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} (v^i e_i) = \frac{\partial}{\partial x^j} (v^i e_i) \quad e^j = \frac{\partial}{\partial x^j} e_i \quad e^j$$

On en déduit :

(a) *Forme matricielle du gradient spatial*

$$[grad(v)] = \begin{bmatrix} \frac{v^1}{x^1} & \frac{v^1}{x^2} & \frac{v^1}{x^3} \\ \frac{v^2}{x^1} & \frac{v^2}{x^2} & \frac{v^2}{x^3} \\ \frac{v^3}{x^1} & \frac{v^3}{x^2} & \frac{v^3}{x^3} \end{bmatrix}$$

(b) Forme tensorielle avec la base $e_i \quad e^j$:

$$\begin{aligned} grad(v) &= \frac{v^1}{x^1}e_1 \quad e^1 + \frac{v^2}{x^1}e_2 \quad e^1 + \frac{v^3}{x^1}e_3 \quad e^1 \\ &+ \frac{v^1}{x^2}e_1 \quad e^2 + \frac{v^2}{x^2}e_2 \quad e^2 + \frac{v^3}{x^2}e_3 \quad e^2 \\ &+ \frac{v^1}{x^3}e_1 \quad e^3 + \frac{v^2}{x^3}e_2 \quad e^3 + \frac{v^3}{x^3}e_3 \quad e^3 \end{aligned}$$

N.B. Par la suite, nous nous intéresserons aux grandes transformations des solides, et utiliserons sauf exception, la description lagrangienne.

Cinématique des fibres matérielles

Considérons une fibre matérielle $dx = T_x(B)$ qui est la transformée de la fibre initiale $dX = T_X B$. La dérivée temporelle de la fibre transformée s'écrit :

$$\dot{dx} = F dX \quad \dot{\overline{dx}} = \dot{F}(dX) + F(\dot{\overline{dX}})$$

Pour une description matérielle qui considère la configuration initiale comme configuration de référence, $\dot{\overline{dX}} = 0$, on a alors :

$$\dot{\overline{dx}} = \dot{F}(dX) = \frac{\partial F}{\partial t}(X, t)(dX) = \frac{\partial}{\partial X} \left[\frac{\partial}{\partial t} (X, t) \right] (dX) = \frac{\partial}{\partial X} v(X, t)(dX)$$

En utilisant la propriété des dérivations composées, nous avons :

$$\dot{\overline{dx}} = \frac{\partial}{\partial x} v[X(x, t), t] \frac{\partial}{\partial X} x(X, t)(dX)$$

Ainsi, la cinématique des fibres est définie par la relation suivante :

$$\dot{\bar{d}x} = \text{grad}(v)(dx) \quad (\text{T-F 49})$$

On peut se conformer à la décomposition de STOKES pour séparer le tenseur vitesse de déformation et le tenseur vitesse de rotation de la fibre :

$$\dot{\bar{d}x} = \frac{1}{2}(\text{grad}v + \text{grad}^T v)(dx) + \frac{1}{2}(\text{grad}v - \text{grad}^T v)(dx) \quad (\text{T-F 50})$$

Avec les tenseurs vitesse de déformation et vitesse de rotation:

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2}(\text{grad}v + \text{grad}^T v) \\ W &= \frac{1}{2}(\text{grad}v - \text{grad}^T v) \end{aligned} \quad (\text{T-F 51})$$

Remarques :

(a) En prenant la relation $\text{grad}(v) = \dot{F}F^{-1} = (\dot{R}U + R\dot{U})U^{-1}R^T$, on trouve :

$$D = \frac{1}{2}R(\dot{U}U^{-1} + U^{-1}\dot{U})R^T$$

$$W = \frac{1}{2}R(\dot{U}U^{-1} - U^{-1}\dot{U})R^T$$

avec $\dot{R}R^T$. Cette dernière relation montre que la vitesse de rotation de la fibre matérielle est constituée d'une rotation "rigide" correspondant à la décomposition polaire et d'une rotation due à la déformation (cette dernière est nulle lorsque la fibre est alignée selon les directions principales).

(b) La décomposition de la vitesse de déformation dans la base convectée s'écrit :

$$f_I D(f_J) = f_I \frac{1}{2}(\text{grad}v + \text{grad}^T v)(f_J) = \frac{1}{2} \overline{\dot{(f_I f_J)}} = \dot{E}_{IJ} \quad (\text{T-F 52})$$

Ce qui montre que les composantes de la vitesse de déformation sur la base (matérielle) convectée sont égales aux dérivées temporelles des composantes du tenseur de déformation de GREEN-LAGRANGE.

Cinématique des volumes matériels

De nouveau considérons l'élément de volume après déformation, décrit par les vecteurs de la base convectée. Le changement d'un élément de volume peut être réécrit de la manière suivante¹ :

1. $\det(F) = \frac{(f_1 \times f_2) \cdot f_3}{(E_1 \times E_2) \cdot E_3}$

$$dv = \frac{(f_1 \times f_2) \cdot f_3}{(E_1 \times E_2) \cdot E_3} dV \quad (\text{T-F 53})$$

Sa dérivée temporelle devient :

$$\frac{\dot{d}v}{dV} = \frac{(\dot{f}_1 \times f_2) \cdot f_3}{E} + \frac{(f_1 \times \dot{f}_2) \cdot f_3}{E} + \frac{(f_1 \times f_2) \cdot \dot{f}_3}{E} dV$$

avec $E = (E_1 \times E_2) \cdot E_3$.

En utilisant l'invariance du produit mixte par une permutation circulaire, on a :

$$\frac{\dot{d}v}{dV} = \frac{\dot{f}_1 \cdot (f_2 \times f_3)}{E} + \frac{\dot{f}_2 \cdot (f_3 \times f_1)}{E} + \frac{\dot{f}_3 \cdot (f_1 \times f_2)}{E} dV$$

$$\frac{\dot{d}v}{dV} = \frac{\text{grad}v(f_1) \cdot (f_2 \times f_3)}{E} + \frac{\text{grad}v(f_2) \cdot (f_3 \times f_1)}{E} + \frac{\text{grad}v(f_3) \cdot (f_1 \times f_2)}{E} dV$$

Rappelons la définition du produit vectoriel à partir du produit mixte:

$$(u \times v) \cdot w = \det(u, v, w)$$

On en déduit :

$$f_2 \times f_3 = (f_1, f_2, f_3) f^1$$

$$f_3 \times f_1 = (f_1, f_2, f_3) f^2$$

$$f_1 \times f_2 = (f_1, f_2, f_3) f^3$$

Finalement, la vitesse de déformation d'un élément de volume s'écrit:

$$\frac{\dot{d}v}{dV} = J \{ \text{grad}v(f_1) \cdot f^1 + \text{grad}v(f_2) \cdot f^2 + \text{grad}v(f_3) \cdot f^3 \} dV$$

en notant que $J = [(f_1 \times f_2) \cdot f_3] / [(E_1 \times E_2) \cdot E_3]$

D'où la relation :

$$\frac{\dot{d}v}{dV} = \text{tr}(\text{grad}v) dv = \text{div}(v) dv \quad (\text{T-F 54})$$

Autre démonstration. (b) Déterminant $I_3(F) = \det F$

Il faut rappeler que $\det(F - I) = -I_3(F) + I_1(F)I_2(F) - I_2(F)I_3(F) + I_3(F)^3$, ce qui nous donne pour $\det(F) = -1$:

$$\det(I + A) = 1 + I_1(A) + I_2(A) + I_3(A)$$

$$I_3(F + v) = I_3[F(I + F^{-1}v)] = I_3(F)I_3(I + F^{-1}v)$$

$$I_3(F + v) = I_3(F)[1 + I_1(F^{-1}v) + 0(\|F^{-1}v\|^2)]$$

$$DI_3(F)[v] = \det(F)tr(F^{-1}v) = \det(F)tr(gradv) = Jdiv(v)$$

Cinématique des surfaces matérielles

De la cinématique des fibres et des volumes, nous pouvons calculer la déformation et rotation des éléments de surface matérielle dans un milieu en transformations finies :

$$\dot{\overline{ds}} = JF^{-T}(dS) + \overline{JF^{-T}}(dS) + JF^{-T}(\dot{\overline{dS}})$$

$$\dot{\overline{ds}} = \frac{\dot{J}}{J}(ds) + \overline{F^{-T}}F^T(ds)$$

$$\text{Or } \dot{F} = gradv(F) \text{ ce qui donne } \overline{F^{-T}}F^T = -grad^T v$$

Ce qui nous donne finalement la cinématique d'une surface matérielle :

$$\dot{\overline{ds}} = div(v)ds - grad^T v(ds) \quad (\text{T-F 55})$$

La vitesse de transformation d'un élément de surface inclut un changement d'aire et une rotation rigide, égale à celle d'une fibre matérielle. On peut faire des remarques similaires que pour les fibres.

Autre démonstration :

$$ds = JF^{-T}(dS) = JdS_I f^I$$

$$\dot{\overline{ds}} = \dot{J}dS_I f^I + JdS_I \dot{f}^I$$

Or de la réciprocité, on a :

$$f_I(f^J) = \frac{J}{I} \quad f^J = -grad^T v(f^I)$$

Ce qui nous donne :

$$\frac{d}{ds} = \text{div}(v)ds - \text{grad}^T v(ds) \cdot$$

Dérivée temporelle de grandeurs intégrales

Vitesse de transformation des quantités intégrales

A l'aide des relations cinématiques (T-F 49), (T-F 54) et (T-F 55), on peut déduire les vitesses de transformations des quantités intégrales comme suivent :

(a) *Quantité linéaire*

$$(L, t) = \int_L dx$$

$$\frac{d}{dt} = \int_L \frac{d}{dt} dx + \text{grad}v(dx) = \int_L \frac{d}{dt} i + \text{grad}v dx$$

(b) *Quantité surfacique*

$$(S, t) = \int_S ds$$

$$\frac{d}{dt} = \int_S \frac{d}{dt} ds + \text{div}(v)ds - \text{grad}v^T(ds) = \int_S \frac{d}{dt} i + \text{div}(v)i - \text{grad}v^T ds$$

(c) *Quantité volumique*

$$(V, t) = \int_V dv$$

$$\frac{d}{dt} = \int_V \frac{d}{dt} dv + \text{div}(v)dv$$

En utilisant le théorème de la divergence, on peut déduire :

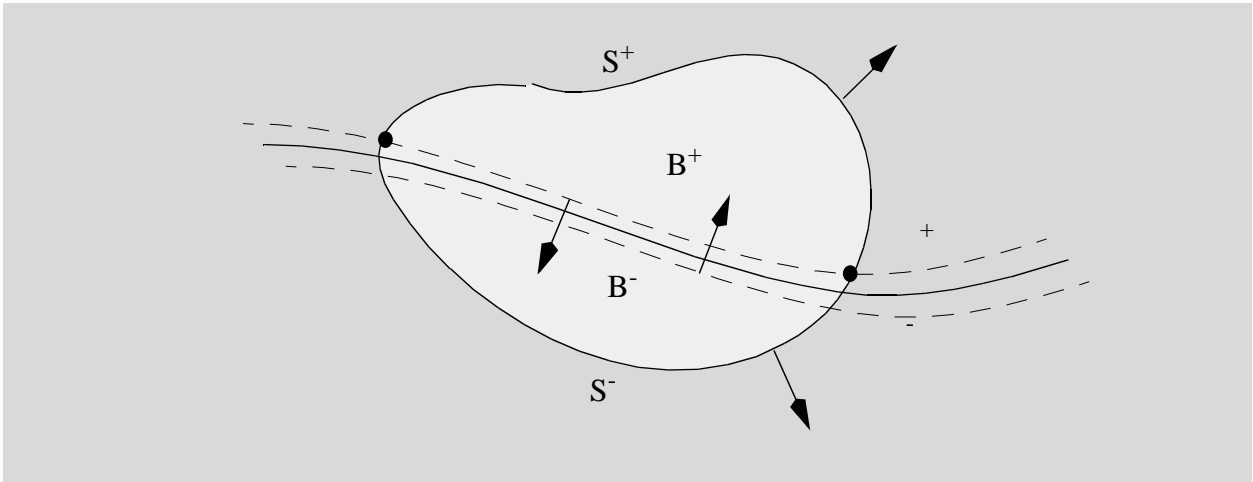
$$\frac{d}{dt} = \int_V \frac{d}{dt} dv + \text{div}(v) dv = \int_V \frac{d}{dt} dv + \int_V v \cdot ds \quad (\text{T-F 56})$$

Surface de discontinuité et théorème de transport

Généralisons les formules cinématiques au cas où le milieu continu comporte une surface de discontinuité (ondes de choc, ondes d'accélération,...). Tout le développement dans ce paragraphe considère le milieu continu avec une discontinuité à l'instant t et le solide est dans son état déformé, on omet la transformation dans la notation pour ne pas alourdir les expressions. On note:

$$(B) \quad B \text{ etc ...}$$

Considérons la surface de discontinuité (t) , se déplaçant à la vitesse u . Le champ (X, t) est de classe C^1 partout sauf sur la surface (t) . En écrivant la vitesse de la quantité intégrale pour les deux sous-volumes séparés par cette surface de discontinuité, on a :



$$\frac{d}{dt} \int_{B^+} dv = \int_{B^+} \frac{dv}{t} + \int_{B^+} v ds = \int_{B^+} \frac{dv}{t} + \int_{S^+} v ds + \int_{S^+} u ds$$

$$\frac{d}{dt} \int_{B^+} dv = \int_{B^+} \frac{dv}{t} + \int_{S^+} v ds - \int_{S^+} u_n da \text{ avec } B^+ = S^+ +$$

On suppose que le mouvement de la surface de discontinuité s'effectue dans la direction de la partie positive B^+ du milieu continu.

Ce qui nous donne, en introduisant de nouveau la frontière :

$$\int_{S^+} v ds = \int_{B^+} v ds - \int_{S^+} v ds = \text{div}(v)dv + \int_{S^+} v_n da$$

$$\frac{d}{dt} \int_{B^+} dv = \int_{B^+} \frac{dv}{t} + \text{div}(v)dv + \int_{S^+} v_n da - \int_{S^+} u_n da$$

On refait une démarche similaire pour la partie “négative” $B^- = S^- \cup S^+$:

$$\frac{d}{dt} \int_{B^-} dv = - \frac{1}{t} \int_{B^-} dv + \int_{B^-} \text{div}(\mathbf{v}) dv - \int_{S^+} v_n da + \int_{S^-} u_n da$$

A la limite, les deux surfaces S^- et S^+ vont se rejoindre en S . Ceci nous donne la sommation sur les deux sous-volumes $B = B^+ \cup B^-$:

$$\frac{d}{dt} \int_B dv = - \frac{1}{t} \int_B dv + \int_B \text{div}(\mathbf{v}) dv + \int_B [\![\]\!] v_n da - \int_B [\![\]\!] u_n da$$

en posant $[\![\]\!] = v_n^+ - v_n^-$ le saut du champ \mathbf{v} en traversant la surface S .

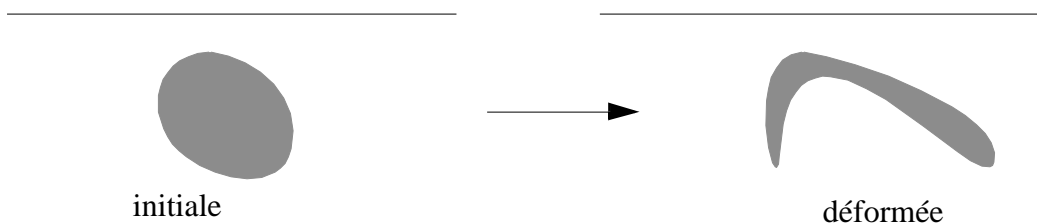
Ce qui donne la dérivée temporelle d’une quantité volumique avec une surface de discontinuité:

$$\frac{d}{dt} \int_B dv = \int_B \left[-\frac{1}{t} + \text{div}(\mathbf{v}) \right] dv + \int_B [\![\]\!] (v_n - u_n) da \tag{T-F 57}$$

Notes

Fonctions d’allongement (“Stretching functions”)

On considère la mouvement d’un milieu continu en transformations finies (Suivre la masse grise sur la figure).



- Rappeler les relations qui relient les fibres matérielles, les surfaces (infinitésimales) matérielles et les volumes matérielles avant et après transformation. On définit les deux grandeurs suivantes (respectivement changement de longueur d’une fibre et changement d’aire d’une facette) :

$$\lim_{|dX| \rightarrow 0} \frac{|dx|}{|dX|} \quad \lim_{|dX| \rightarrow 0} \frac{|ds|}{|dS|} \tag{T-F 58}$$

On définit les vecteurs unités fibre et facette dans la configuration initiale:

$$M = \frac{dX}{|dX|} \quad N = \frac{dS}{|dS|} \quad (\text{T-F 59})$$

Montrer les relations suivantes :

$$= \sqrt{M^T C(M)} \quad = \sqrt{N^T C^{-1}(N)} \quad (\text{T-F 60})$$

2. On définit les vecteurs unités fibre et facette dans la configuration déformée :

$$m = \frac{dx}{|dx|} \quad n = \frac{ds}{|ds|} \quad (\text{T-F 61})$$

Montrer les relations :

$$m = \frac{1}{J} F(M) \quad n = \frac{\det F}{J} F^{-T}(N) \quad (\text{T-F 62})$$

3. Montrer les relations suivantes :

$$\frac{d}{dt}(\ln \quad) = m^T D(m)$$

$$\frac{d}{dt}(\ln \quad) = \text{div}(v) - n^T D(n) \quad (\text{T-F 63})$$

$$\frac{d}{dt}(\ln J) = \text{div}(v)$$

Note. Les deux premières dérivées sont appelées fonctions d'allongement, et sont souvent utilisées dans la théorie des mélanges des milieux continus en transformations finies et en mécanique des fluides "épais". En pratique, moyennant l'utilisation de Cauchy-Schwarz, on introduit des grandeurs adimensionnelles :

$$e = \frac{1}{\sqrt{D:D}} \frac{d}{dt}(\ln \quad) \quad e = \frac{1}{\sqrt{2D:D}} \frac{d}{dt}(\ln \quad) \quad (\text{T-F 64})$$

CONTRAINTES EN TRANSFORMATIONS FINIES

Lois de conservation

Les milieux continus forment une classe particulière des systèmes matériels pour lesquels les lois de conservation doivent être précisées. La formulation de ces lois de conservation découle des principes généraux de la mécanique :

- la conservation de la MASSE
- la conservation de la QUANTITÉ DE MOUVEMENT (moment linéaire)
- la conservation du MOMENT CINÉTIQUE (moment angulaire).

Vitesse - Accélération

Considérons un milieu continu en mouvement par rapport à un corps de référence schématisé par un repère cartésien. Pour ce milieu continu dont le champ de déplacement est noté :

$$u(X, t) = x(X, t) - X \quad (\text{C-1})$$

Les champs de vitesse et d'accélération sont respectivement définis par :

$$v(X, t) = \frac{\partial}{\partial t} u(X, t) \quad (\text{C-2})$$

$$a(X, t) = \frac{\partial}{\partial t} v(X, t) \quad (\text{C-3})$$

Dans ce cours, le vecteur-position X correspond à la position du point matériel à l'instant initial. Dans ce cas, les dérivées totales dans (C-2) et (C-3) se réduisent à des dérivées partielles par rapport au temps.

Conservation de la masse : Équation de continuité

Tout d'abord, le modèle de milieu continu admet une répartition continue de la masse à tout instant:

$$m(B, t) = \int_{(B)} \rho(x, t) dv(x, t) \quad (\text{C-4})$$

La conservation de la masse a été déjà évoquée lors de l'hypothèse de continuité de la transformation. Rappelons que l'hypothèse de continuité de la transformation implique que :

Les points matériels qui à l'instant t_0 se trouvent à l'intérieur d'une surface fermée restent à tout instant à l'intérieur de la surface transformée. En conséquence, le principe de CONSERVATION DE LA MASSE implique que la masse contenue dans toute surface matérielle fermée quelconque reste constante au cours de la transformation.

Ceci s'exprime par la relation :

$$\int_{(B)} (x, t) dv(x, t) = \int_{(B)} \rho_0(X) dv_0(X) \tag{C-5}$$

En effectuant un changement de variables $x = x(X, t)$ pour le premier intégral, nous obtenons:

$$\int_{(B)} (X, t) J(X, t) dv_0(X) = \int_{(B)} \rho_0(X) dv_0(X) \tag{C-6}$$

Localement, on a donc l'équation de conservation de masse :

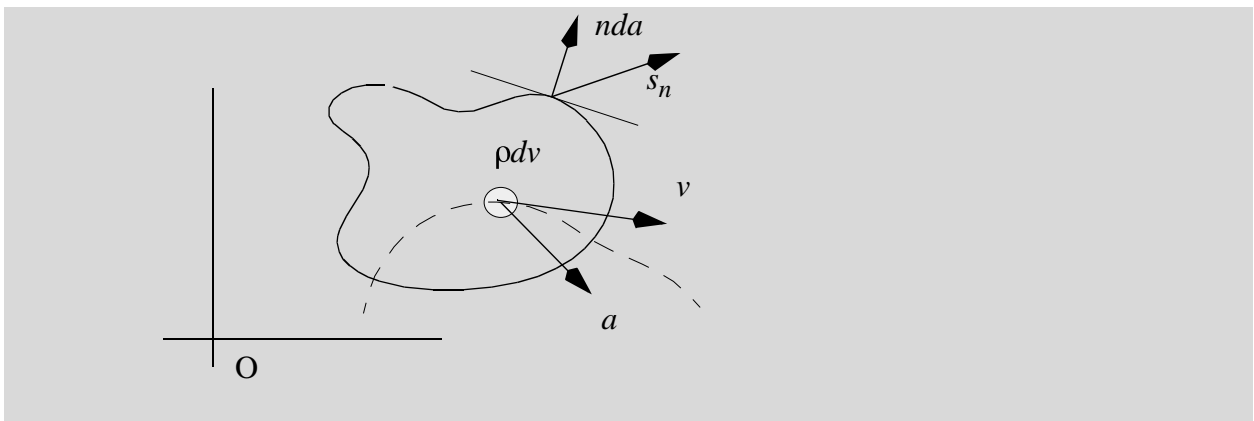
$$(X, t) J(X, t) = \rho_0(X) \tag{C-7}$$

Equations dynamiques

En mécanique classique, les équations du mouvement du milieu continu sont déduites des principes fondamentaux de la dynamique:

(a) *(Théorème de la quantité de mouvement) La variation de la quantité de mouvement du milieu continu est égale à la somme de toutes les forces extérieures s'appliquant sur le milieu continu.*

(b) *(Théorème du moment cinétique) La variation du moment cinétique du milieu continu par rapport à un point fixe de l'espace O (origine) est égale au moment de toutes les forces extérieures (et des moments extérieurs) appliquées sur le milieu continu.*



L'élément de volume dv renferme une masse de matière $dm = \rho dv$. D'une part, la quantité de mouvement et le moment cinétique du milieu continu B à l'instant t sont respectivement donnés par:

$$l(B, t) = \int_{(B)} x \times v dv \tag{C-8}$$

$$h_O(B, t) = \int_{(B)} x \times x \times v dv \tag{C-9}$$

D'autre part, on suppose que les forces extérieures s'appliquant sur un milieu continu peuvent être

modélisées par une force volumique sur B et par une force de contact sur la frontière ∂B . En chaque point :

(a) la force volumique est schématisée par $\int_B b dv$ dans laquelle b est un champ continu sur la fermeture \bar{B} , à tout instant.

(b) la force surfacique est schématisée par un champ de vecteur $\int_{\partial B} p_n da$ défini sur la frontière, continu sur \bar{B} et de classe C^1 sur l'ouvert B . Ce champ est appelé champ de vecteur contrainte.

Les équations globales du mouvement du milieu continu s'écrivent :

$$\frac{d}{dt} \int_B v dv = \int_B p_n da + \int_B b dv \tag{C-10}$$

$$\frac{d}{dt} \int_B x \times v dv = \int_B x \times p_n da + \int_B x \times b dv \tag{C-11}$$

Théorème de CAUCHY

Existence du tenseur de contrainte

Considérons un milieu continu en mouvement soumis aux forces de contact p_n et volumiques b . Faisons l'hypothèse que le vecteur contrainte dépend seulement du vecteur normal unité sortant à la frontière du milieu $p_n = p_n n$ (Hypothèse de CAUCHY)¹. Les équations globales du mouvement sont satisfaites si et seulement si:

(a) Il existe un tenseur du deuxième ordre σ symétrique tel que $p_n = \sigma(n)$

(b) σ satisfait à l'équation du mouvement

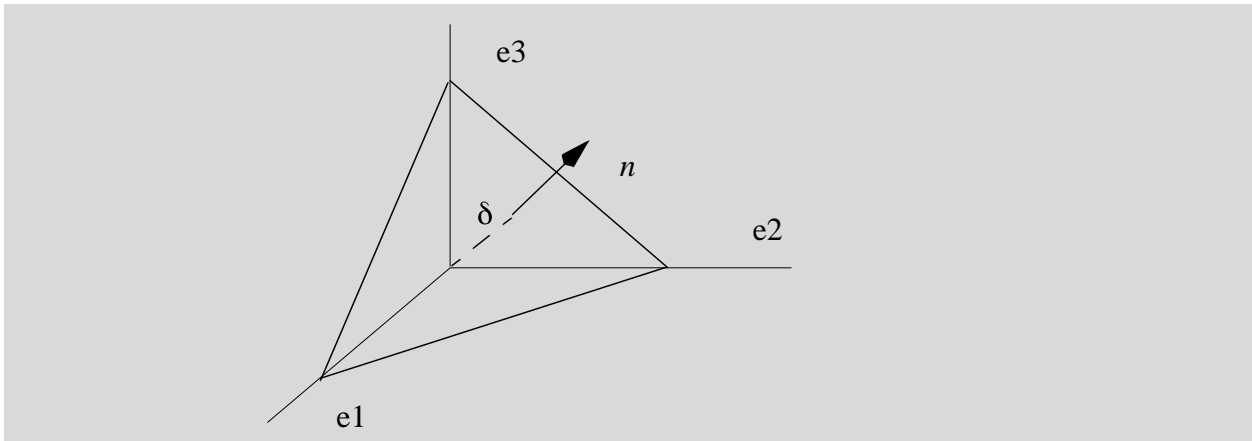
$$\text{div } \sigma + b = a \tag{C-12}$$

(Preuve) (Nécessité) Supposons satisfaites les équations globales du mouvement (C-10) et (C-11). Supprimons le temps t pour ne pas alourdir l'exposé mais sans nuire à la généralité des résultats.

(Etape 1) Considérons le trièdre autour du point y , (formé par les vecteurs de base $\{e_1, e_2, e_3\}$ et le vecteur n tel que $n \cdot e_i > 0$).

Les forces volumiques sont d'ordre plus élevé que les forces surfaciques. Pour tout point y intérieur à B , le tétraèdre T reste à l'intérieur pour une dimension caractéristique petite du tétraèdre. A tout instant $(b - a)$ est borné pour tout point intérieur à B car chacune des fonctions σ , b et a est continue. De la relation (C-10), nous pouvons écrire que :

1. Elle ne dépend par exemple pas de la courbure de cette surface.



$$\left| \int p_n da \right| = \left| \int (b-a) dv \right| < \text{vol}(\text{tetrahedron})$$

pour tout $\epsilon > 0$, avec δ indépendant de ϵ . Soit $A(\delta)$ l'aire de la face inclinée, de normale n proportionnelle à δ^2 . Puisque $\text{vol}(\text{tetrahedron})$ est proportionnel à δ^3 , nous déduisons de la relation précédente que :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{A(\delta)} \int p_n da = 0$$

(Interprétation mécanique) L'équilibre de ce tétraèdre infinitésimal est alors simplifié car on peut négliger les forces volumiques pour $\delta \rightarrow 0$:

$$p_n n da + p_{n1} (-e_1) da_1 + p_{n2} (-e_2) da_2 + p_{n3} (-e_3) da_3 = 0$$

Or géométriquement nous avons : $da_i = \cos(n, e_i) da = (n \cdot e_i) da$. Ce qui nous permet d'écrire :

$$p_n n + \sum_{i=1,3} (n \cdot e_i) p_{ni} (-e_i) = 0$$

(Etape 2). (Loi de l'action et de la réaction de Newton) Puisque la fonction $p_n n$ est continue par hypothèse, il en est de même pour le second terme. La relation précédente reste ainsi valable en faisant tendre le vecteur k vers n'importe quel vecteur de base $n \cdot e_i$: $p_n \cdot e_i + p_{ni} (-e_i) = 0$. On en déduit :

$$p_n n + p_{nn} (-n) = 0 \tag{C-13}$$

(Etape 3) En combinant les résultats des étapes (1) et (2), nous déduisons :

$$p_n n = \sum_{i=1,3} (n \cdot e_i) p_{ni} e_i = \sum_{i=1,3} p_{ni} e_i = e_i(n)$$

Ce qui montre que le vecteur normal unité peut être mis en facteur et qu'un tenseur du second ordre, appelé tenseur des contraintes de CAUCHY, existe:

$$p_n \mathbf{n} = \sum_{i=1,3} p_n e_i \quad e_i(\mathbf{n}) = (\mathbf{n}).$$

(Etape 4) En reprenant (C-10), on écrit :

$$\frac{d}{dt} \int_{(B)} \mathbf{v} dv = \int_{(B)} (\mathbf{n}) da + \int_{(B)} \mathbf{b} dv = \int_{(B)} \text{div} \mathbf{v} dv + \int_{(B)} \mathbf{b} dv$$

$$D'où \text{div} \mathbf{v} + \mathbf{b} = \mathbf{a}$$

(Etape 4). Pour la symétrie de \mathbf{T} , considérons le théorème du moment cinétique (C-11) et écrivons :

$$\frac{d}{dt} \int_{(B)} \mathbf{x} \times \mathbf{v} dv = \int_{(B)} \mathbf{x} \times (\mathbf{n}) da + \int_{(B)} \mathbf{x} \times \mathbf{b} dv$$

La multiplication par un vecteur uniforme quelconque \mathbf{u}_0 donne :

$$\int_{(B)} (\mathbf{x} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{u}_0 dv = \int_{(B)} [\mathbf{x} \times (\mathbf{n})] \cdot \mathbf{u}_0 da + \int_{(B)} (\mathbf{x} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{u}_0 dv$$

Écrivons :

$$\int_{(B)} (\mathbf{u}_0 \times \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{n}) da = \int_{(B)} \mathbf{T}(\mathbf{u}_0 \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} da = \int_{(B)} \text{div} [\mathbf{T}(\mathbf{u}_0 \times \mathbf{x})] dv$$

(cf. exercice)

$$\int_{(B)} \text{div} [\mathbf{T}(\mathbf{u}_0 \times \mathbf{x})] dv = \int_{(B)} [\mathbf{T} : \text{grad}(\mathbf{u}_0 \times \mathbf{x}) + (\mathbf{u}_0 \times \mathbf{x}) \cdot \text{div} \mathbf{T}] dv$$

$$\int_{(B)} \text{div} [\mathbf{T}(\mathbf{u}_0 \times \mathbf{x})] dv = \int_{(B)} \mathbf{T} : \text{grad}(\mathbf{u}_0 \times \mathbf{x}) dv + \int_{(B)} \mathbf{u}_0 \cdot (\mathbf{x} \times \text{div} \mathbf{T}) dv$$

En utilisant l'équation d'équilibre en translation (C-10), on a :

$$\int_{(B)} \mathbf{T} : \text{grad}(\mathbf{u}_0 \times \mathbf{x}) dv = 0$$

$$(u_0 \times x) = \begin{bmatrix} u_{02}x_3 - u_{03}x_2 \\ u_{03}x_1 - u_{01}x_3 \\ u_{01}x_2 - u_{02}x_1 \end{bmatrix} \quad \text{grad}(u_0 \times x) = \begin{bmatrix} 0 & -u_{03} & u_{02} \\ u_{03} & 0 & -u_{01} \\ -u_{02} & u_{01} & 0 \end{bmatrix}$$

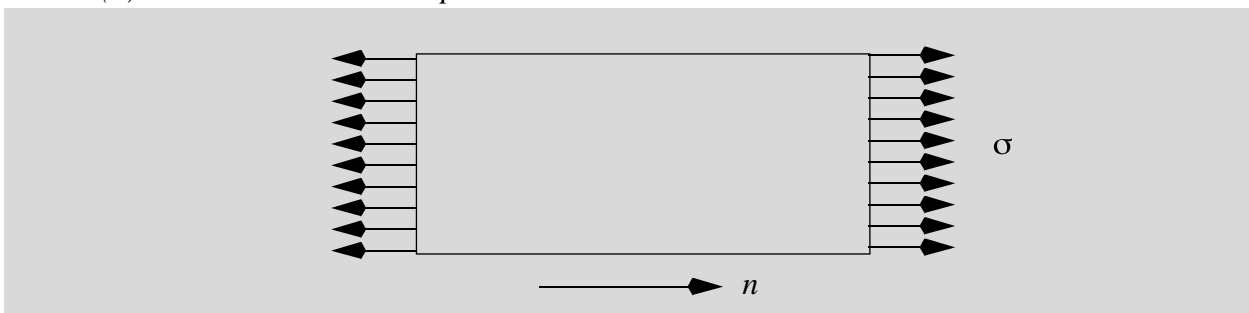
d'où la symétrie de

$$= T \cdot$$

Exemples de contraintes

De même que pour les déformations homogènes, on peut citer les exemples de contraintes :

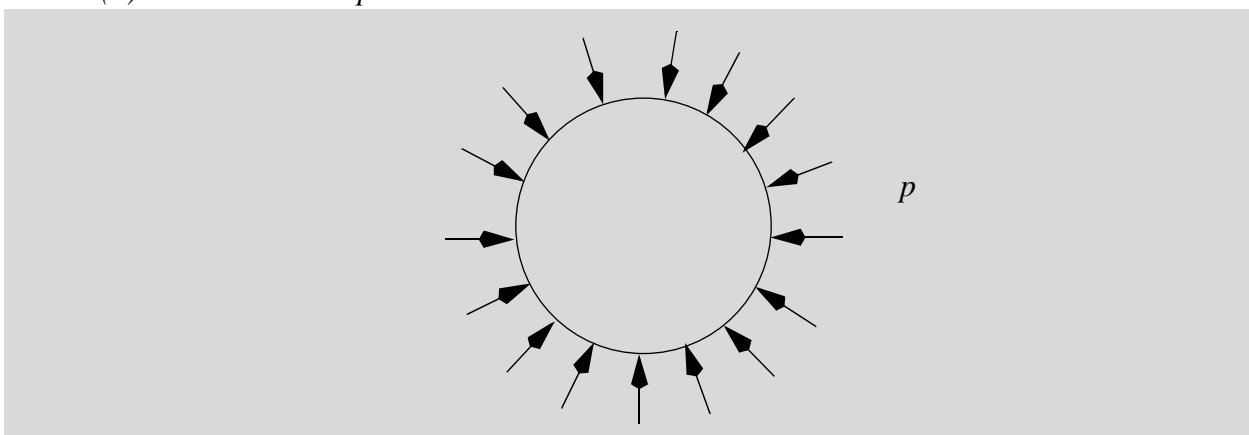
(a) Traction/Extension simple : $= n \ n$



Base orthonormée formé par $\{n, e_2, e_3\}$

$$[] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

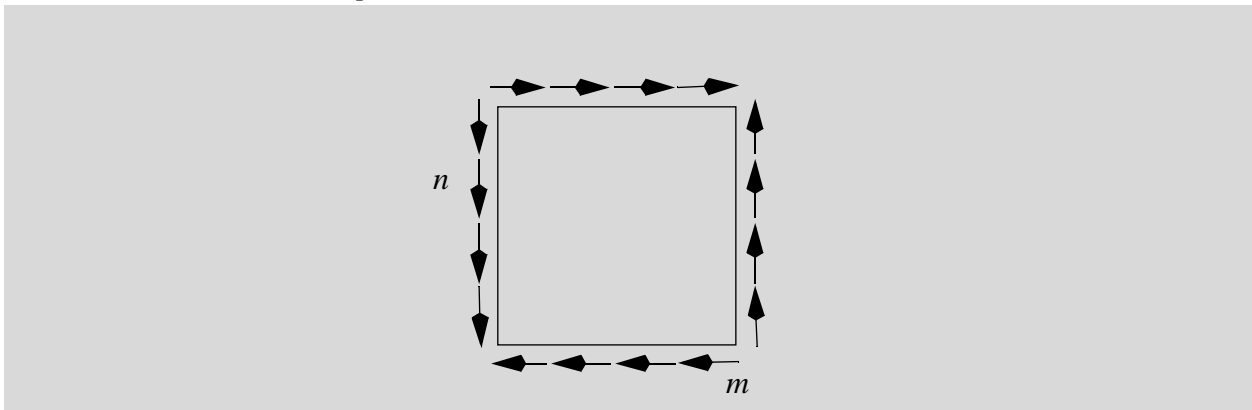
(b) Pression : $= pI$



Dans la base orthonormée formé par $\{n, e_2, e_3\}$, la matrice du tenseur devient :

$$[] = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}$$

(c) Cisaillement simple : $\sigma = (m \quad n + n \quad m)$



$$[] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Remarque. Les exemples d'état de contrainte ci-dessus vérifient les équations d'équilibre:

$$div \sigma = 0 \quad \sigma = T$$

Ces contraintes sont dites auto-équilibrées localement. Une étude particulière de ces contraintes sera menée à la fin du chapitre.

Contraintes principales

Pour une contrainte donnée, on peut appliquer les deux décompositions :

(a) décompositions suivant les trois directions principales orthogonales (puisque σ est symétrique)

$$\sigma = \sigma_1 e_1 \otimes e_1 + \sigma_2 e_2 \otimes e_2 + \sigma_3 e_3 \otimes e_3 \tag{C-14}$$

$\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ sont appelées contraintes principales. Elles peuvent être exprimées en fonctions des invariants principaux du tenseur de contrainte.

Exemple 2D : Considérons la contrainte plane avec la matrice

$$[] = \begin{bmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \end{bmatrix}$$

L'équation caractéristique pour déterminer les valeurs propres s'écrit :

$$\lambda^2 - \text{tr}(\boldsymbol{\sigma})\lambda + \det(\boldsymbol{\sigma}) = 0$$

Les contraintes sont les racines de cette équation :

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - \frac{\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}}{2} \quad \sigma_2 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \frac{\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}}{2}$$

Les directions propres (orthogonales) sont définies par l'angle

$$\tan(2\theta) = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}}$$

Exemple : Pour un cisaillement simple, on peut extraire les contraintes principales

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & 0 \\ - & 0 \\ 0 & 0 - \end{bmatrix} \quad \det \begin{bmatrix} - & 0 \\ - & 0 \\ 0 & 0 - \end{bmatrix} = 0$$

D'où les trois valeurs propres :

$$\sigma_1 = - \quad \sigma_2 = 0 \quad \sigma_3 =$$

Les trois vecteurs propres associés sont respectivement:

$$e_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(m - n) \quad e_2 = m \times n \quad e_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(n + m).$$

(b) Décomposition suivant la pression et le cisaillement de von Mises (Cette décomposition est souvent utilisée dans les codes numériques).

$$p = \frac{1}{3}\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \quad \boldsymbol{\sigma}' = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{oct} \quad |\boldsymbol{\sigma}'| = \sqrt{\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}'^T \boldsymbol{\sigma}')}$$
(C-15)

Exemple. Considérons la contrainte définie par la matrice de contrainte:

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

On a la pression et la contrainte déviatorique :

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$$

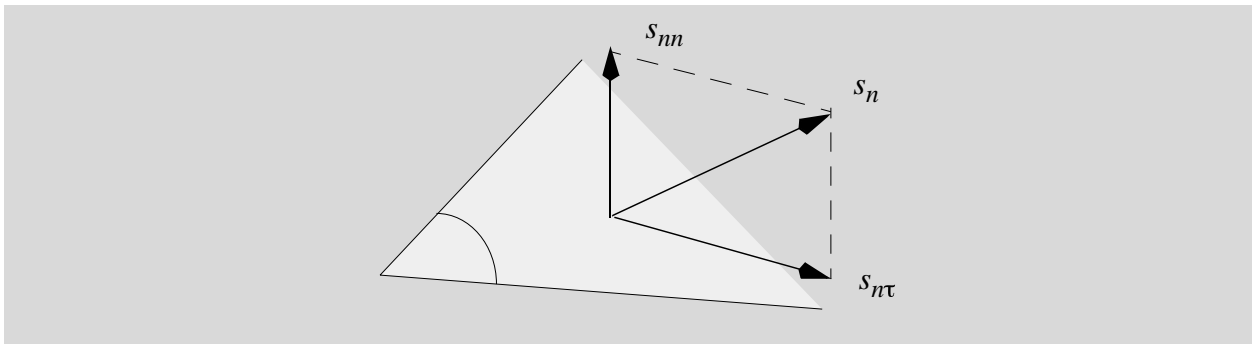
$$[s'] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33}) & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \frac{1}{3}(\sigma_{11} + 2\sigma_{22} - \sigma_{33}) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \end{bmatrix}$$

Contrainte normale - Contrainte tangentielle

Considérons un champ de contrainte $\sigma(x)$. En appliquant les tenseurs de projection, le vecteur contrainte sur une facette quelconque de normale n peut être décomposé en une contrainte normale et une contrainte tangentielle :

$$p_{nn} = (n \cdot n)(p_n) = (n \cdot n)[\sigma(n)] = [n \cdot (\sigma(n))]n = \sigma_{nn}n$$

$$p_n = (I - n \cdot n)(p_n) = (I - n \cdot n)[\sigma(n)] = p_n - \sigma_{nn}n$$

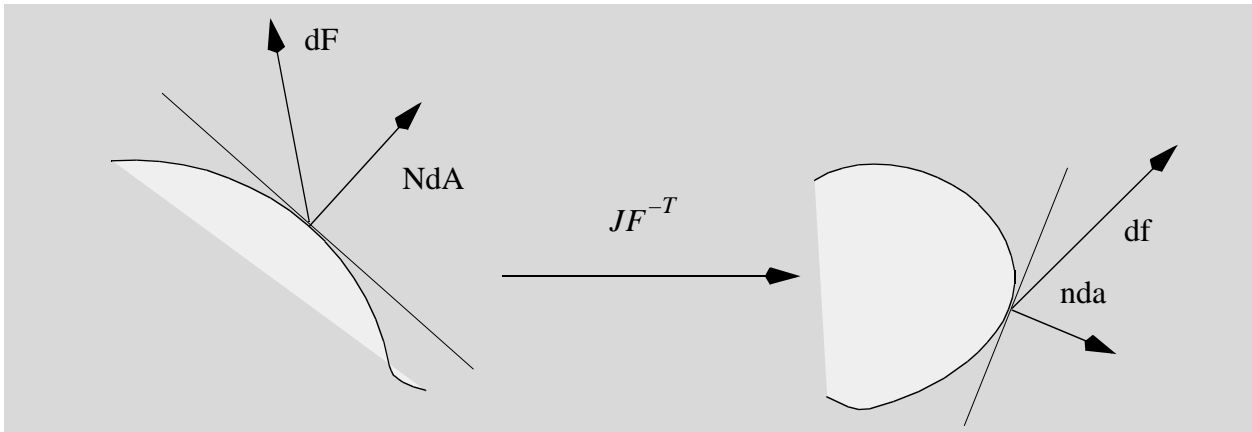


On observe que la direction n est une direction principale de la contrainte si et seulement si la contrainte tangentielle associée est nulle. Par exemple, un fluide au repos n'est pas capable d'exercer une contrainte tangentielle quelle que soit la facette considérée autour d'un point.

Tenseurs de contraintes en transformations finies

Les lois de conservation et par conséquent le théorème d'existence de la contrainte interne ont été développés dans la configuration déformée du milieu continu en transformations finies. Le problème principal est la méconnaissance de la configuration déformée. Le but du présent chapitre

tre est de montrer comment on peut introduire d'autres mesures, autres que la contrainte de CAUCHY, pour évaluer les contraintes internes dans le solide.



Considérons la force de contact df s'appliquant sur l'élément de surface matérielle ds dans la configuration déformée du milieu continu soumis à une transformation finie. Le théorème de CAUCHY nous dit que cette force peut être exprimée en fonction de l'élément de surface et du tenseur de contrainte comme suit:

$$df = (n)da \tag{C-16}$$

Contrainte nominale (PIOLA-KIRCHHOFF 1)

La relation théorique (C-16) est facile d'aspect mais difficile en mettre en oeuvre en pratique puisque la surface déformée fait partie de l'inconnue du problème. Pour éliminer la surface déformée, on introduit la formule de NANSON pour obtenir :

$$df = (n)da = [JF^{-T}(N)]dA = J F^{-T}(N)dA$$

Pour garder une formulation analogue à (C-16), il est d'usage d'introduire la contrainte nominale:

$$P = J F^{-T} \tag{C-17}$$

qui permet d'écrire :

$$df = P(N)dA \tag{C-18}$$

La contrainte nominale est aussi appelé contrainte de PIOLA-KIRCHHOFF 1, ou encore contrainte de PIOLA-BOUSSINESQ. Elle relie la surface matérielle dans la configuration initiale à la force qui s'exerce sur la même surface matérielle dans la configuration déformée. Avec la contrainte nominale, on peut réécrire les équations d'équilibre. Pour la quantité de mouvement, on peut partir de l'équation globale :

$$\frac{d}{dt} \int_{(B)} v dv = \int_{(B)} p_n da + \int_{(B)} b dv \tag{C-19}$$

De nouveau, on effectue un changement de variable $x(X, t)$ X (possible grâce à l'hypothèse de

continuité de la transformation). Faisons deux remarques:

(a) La masse est par hypothèse constante, ce qui nous donne :

$$\rho(x, t) dv(x, t) = \rho_0(X) dV(X)$$

(b) La force de contact élémentaire $s_n da$ peut être exprimée avec la contrainte nominale $p_n da = (n) da = P(N) dA$. Le théorème de la divergence s'applique pour donner :

$$\int_{(B)} p_n da = \int_B P(N) dA = \int_B \text{Div}(P) dV$$

dans laquelle l'opérateur $\text{Div}(P)$ est la divergence dans la configuration initiale et qui s'écrit pratiquement :

$$\begin{aligned} \text{Div}(P) = & \frac{P^{11}}{X^1} + \frac{P^{12}}{X^2} + \frac{P^{13}}{X^3} E_1 + \frac{P^{21}}{X^1} + \frac{P^{22}}{X^2} + \frac{P^{23}}{X^3} E_2 \\ & + \frac{P^{31}}{X^1} + \frac{P^{32}}{X^2} + \frac{P^{33}}{X^3} E_3 \end{aligned}$$

Moyennant ces deux remarques, on obtient l'équation dynamique locale en translation:

$$\rho_0 \frac{v}{t} = \text{Div}(P) + \rho_0 b \tag{C-20}$$

L'équation du moment cinétique, qui se traduit par la symétrie de la contrainte de CAUCHY donne la relation suivante:

$$P = P^T \tag{C-21}$$

Ce qui montre que la contrainte nominale n'est pas symétrique. De toute façon, la notion de symétrie pour cette contrainte n'a pas de sens puisqu'elle relie deux configurations différentes: l'initiale et la déformée.

Calculons de la puissance de déformation des forces de contact extérieures au milieu continu dans sa configuration déformée :

$$P_e(B, t) = \int_{(B)} p_n v da = \int_{(B)} v (n) da = \int_{(B)} \text{div}(v \cdot P) dv$$

$$P_e(B, t) = \int_{(B)} v \cdot \text{div} P dv + \int_{(B)} P : \text{grad} v dv$$

En considérant le second terme, défini comme étant la puissance de déformation, explicitons en termes de composantes dans la base convectée $\{f_1, f_2, f_3\}$ dont la réciproque est $\{f^1, f^2, f^3\}$:

$$\begin{aligned}
 P_d(B, t) &= \int_{(B)} : \text{grad} v dv = \int_{I=1}^3 (f^I) \text{grad}(f_I) J dV \\
 &= \int_{I=1}^3 P(E^I) \dot{F}(E_I) dV
 \end{aligned}$$

D'où la puissance de déformation :

$$P_d(B, t) = \int_B \text{tr}(P^T \dot{F}) dV \tag{C-22}$$

Conjugaison. On dit que la contrainte nominale est la contrainte conjuguée au gradient de la transformation car elle permet de calculer la puissance de déformation par (C-22).

On peut vérifier que pour une rotation rigide du milieu continu, la vitesse étant de la forme $v = c + x \times \omega$, $\text{grad} v = \text{skw}(\omega)$ et $\dot{F} = F \omega$, ce qui implique :

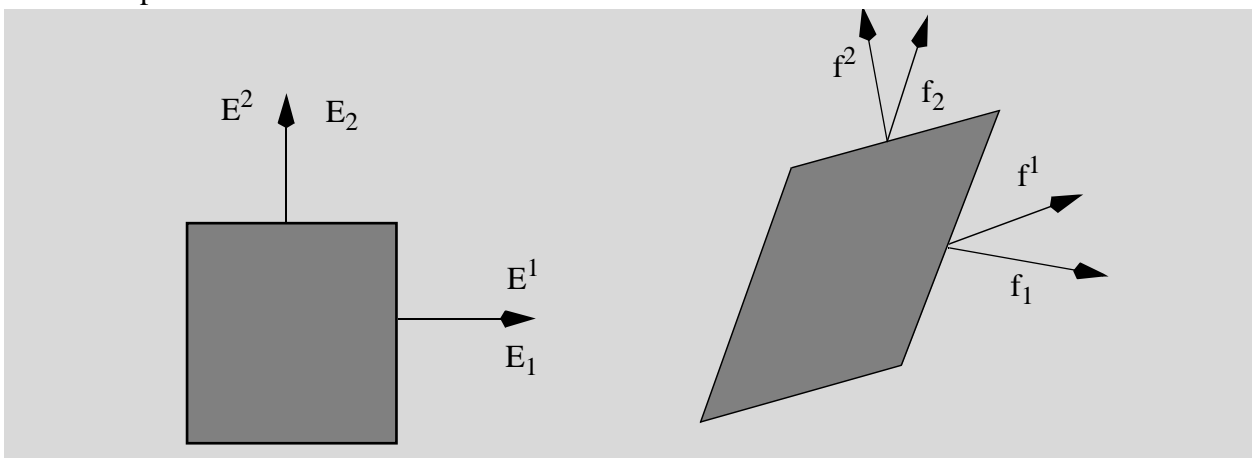
$$P_d(B, t) = \int_B \text{tr}(P^T \text{skw}(\omega) F) dV = \int_B \text{tr}(P^T F \omega) dV = 0$$

$$FP^T = PF^T$$

Ce qui équivaut à la conservation du moment cinétique (C-21) (symétrie de la contrainte de CAUCHY).

Contrainte matérielle (PIOLA-KIRCHHOFF 2)

La contrainte nominale est la contrainte que l'on mesure expérimentalement, elle est la contrainte la plus accessible expérimentalement (force actuelle par unité de surface initiale). De plus, elle permet d'écrire simplement les équations d'équilibre en translation. Son premier défaut majeur est qu'elle n'est pas symétrique et son autre défaut (majeur) est que l'on ne peut pas exprimer une loi de comportement entre la contrainte nominale P et la mesure de déformation associée \dot{F} .



Le but est de trouver une mesure de contrainte symétrique qui soit conjuguée à la défor-

mation de GREEN-LAGRANGE afin d'exprimer la puissance de déformation entièrement avec des grandeurs définies dans la configuration initiale. Pour trouver une mesure de contrainte symétrique, définie dans la configuration initiale, nous repartons de la puissance de déformation (C-22):

$$P_d(B, t) = \int_B \text{tr}(P^T \dot{F}) dV \quad (\text{C-23})$$

Or on peut écrire de la définition de la déformation de GREEN-LAGRANGE :

$$E = \frac{1}{2}(F^T F - I) \quad \dot{E} = \frac{1}{2}(\dot{F}^T F + F^T \dot{F})$$

La contrainte matérielle S que nous cherchons doit satisfaire la relation de conjugaison :

$$P_d(B, t) = \int_B \text{tr}(S^T \dot{E}) dV = \int_B \text{tr}(P^T \dot{F}) dV$$

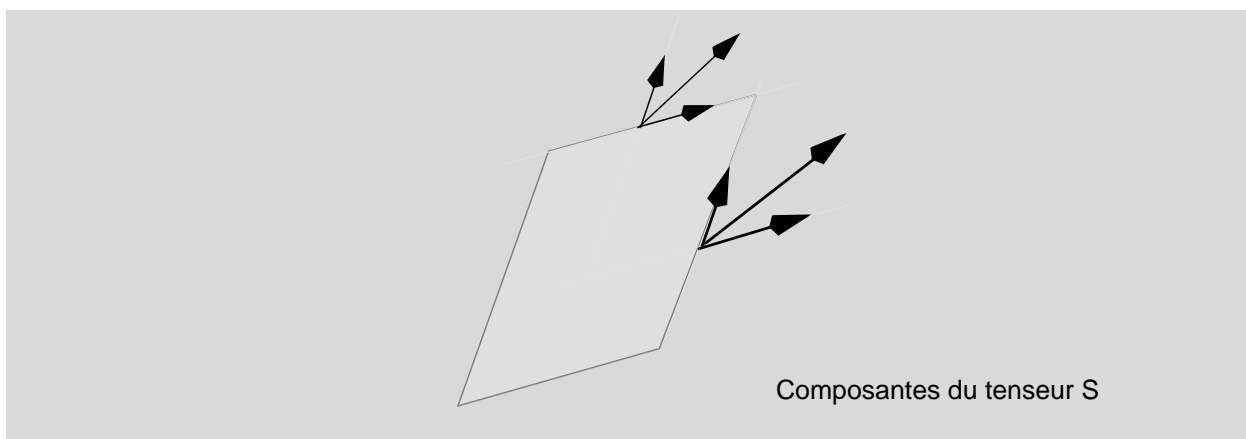
$$\int_B \text{tr}(S^T \dot{E}) dV = \frac{1}{2} \int_B \text{tr}(S^T \dot{F}^T F + S^T F^T \dot{F}) dV = \int_B \text{tr}(P^T \dot{F}) dV$$

Ce qui donne, moyennant les propriétés de la trace et la symétrie voulue de S et puisque ceci doit être valable quelque soit le champ de vitesse du milieu continu :

$$\frac{1}{2} \int_B \text{tr}(S F^T \dot{F} + S^T F^T \dot{F}) dV = \int_B \text{tr}(P^T \dot{F}) dV \quad P = FS$$

La contrainte S est appelée seconde contrainte de PIOLA-KIRCHHOFF et est reliée à la contrainte de CAUCHY et de la première contrainte de PIOLA-KIRCHHOFF P par :

$$P = FS \quad S = F^{-1} P \quad S = J F^{-1} F^{-T} P \quad (\text{C-24})$$



Les équations locales d'équilibre s'écrivent avec la contrainte matérielle :

$$\text{Div}(FS) + {}_0b = {}_0\frac{v}{t} \quad S = S^T \quad (\text{C-25})$$

Remarques

De la conservation de la masse, on a ${}_0\rho = J$ et on définit la contrainte de KIRCHHOFF en pondérant la contrainte de CAUCHY :

$$\frac{\quad}{0} = -$$

On en déduit :

(a) Les composantes de la contrainte de KIRCHHOFF dans la base mixte se confondent avec celles de la contrainte de PIOLA-KIRCHHOFF 1:

$${}^{il} = e^i \quad (f^l) = e^i J [F^{-T}(E^l)] = e^i P(E^l) = P^{il}$$

(b) Les composantes de la contrainte de KIRCHHOFF dans la base convectée se confondent avec celles de la contrainte de PIOLA-KIRCHHOFF 2:

$${}^{IJ} = f^I \quad (f^J) = F^{-T}(E^I) J [F^{-T}(E^J)] = E^I S(E^J) = S^{IJ}$$

Ces relations permettent une interprétation physique du tenseur de PIOLA-KIRCHHOFF 2.

NOTIONS SUR LES LOIS DE COMPORTEMENT

Principe généraux des lois de comportement

Axiomes de NOLL

Pour décrire un matériau, la physique des milieux continus fait appel à quelques principes généraux pour écrire les lois de comportement. Le principe de la séparation des causes et des effets stipule le classement des variables géométriques, cinématiques et mécaniques en variables primaires et duales dans le tableau ci-dessous

Tableau 1: Variables en transformations finies

Variables		
Primales (effets)		
Gradient transformation	F	\dot{F}
Déformation de CAUCHY-GREEN	$C = F^T F$	$\dot{C} = \dot{F}^T F + F^T \dot{F}$
Vitesse de déformation		$2D = \dot{v} + \dot{v}^T$
Déformation de GREEN-LAGRANGE	$2E = (C - I)$	$2\dot{E} = \dot{C}$
Duales (causes)		Conjugaison
Contrainte de CAUCHY		$tr({}^T D)$
Contrainte de PIOLA-KIRCHHOFF 1	$P = J F^{-T}$	$tr(P^T \dot{F})$
Contrainte de PIOLA-KIRCHHOFF 2	$S = J F^{-1} F^{-T}$	$tr(S^T \dot{E}) = tr(S^T (\dot{C}/2))$

D'une manière générale, les lois de comportement (ou lois constitutives) sont les relations qui relient les variables primales et les variables duales. Ces lois permettent de modéliser les réponses des matériaux soumis à des efforts ou à des mouvements imposés. Le développement moderne des lois de comportement repose sur trois axiomes, usuellement attribués à NOLL en 1958.

Déterminisme (NOLL 1) . La contrainte en un point matériel en x à l'instant t est déterminée par l'histoire du mouvement du milieu continu B (c'est-à-dire de tous les points du milieu B) jusqu'au temps t :

$$(x, t) = [(X, t), (X', B, s, t)] \quad (\text{LC-1})$$

Action locale (NOLL 2) . Le mouvement des points situés à une distance finie du point x dans la configuration actuelle peut être négligé pour calculer la contrainte en x .

$$(x, t) = [(X, t), (X, s, t), F(X, s, t)] \quad (\text{LC-2})$$

Comme $(X', s, t) = (X, s, t) + F(X, s, t)(dX)$, la dépendance se limite à (LC-2).

Pour les matériaux, dits simples, la contrainte est “seulement” fonction de l’histoire du gradient de la transformation en négligeant les développements au second ordre.

Pour le 3ème axiome, il faut noter que deux observateurs vont percevoir deux mouvements différents d’un milieu continu en transformations finies (ceci n’est en général pas le cas en transformations infinitésimales où la rotation est supposée *a priori* infinitésimale). Les deux transformations observées différeront par un mouvement rigide du milieu continu. Le mouvement rigide peut être interprété comme la combinaison d’une rotation et d’une translation après la transformation $x = x(X, t)$.

$$x = x_0(t) + Q(t)x(X, t) \quad (\text{LC-3})$$

Indifférence matérielle (NOLL 3). La forme des lois de comportement doit être indépendante des observateurs. Pour la contrainte, cet axiome s’applique :

$$\begin{aligned} &= [x(X, t), \dot{x}(X, s-t), F(x, \dot{x}, s-t)] \\ &= [x(X, t), \dot{x}(X, s-t), F(x, \dot{x}, s-t)] \end{aligned} \quad (\text{LC-4})$$

En d’autres termes, on a $\dot{x} = \dot{x}_0 + \dot{Q}x + Q\dot{x}$. Les matériaux dits simples, basés sur ces trois axiomes, englobent presque toutes les classes de matériaux (cf. fin du chapitre). Il faut calculer comment se transforment les variables géométriques, cinématiques et mécaniques en transformations finies.

L’indépendance par rapport à la translation rigide et par rapport au choix de l’origine du temps permet d’éliminer $\dot{x}(X, s-t)$ et la présence explicite de t parmi les arguments des lois de comportement. Les lois que nous étudierons par la suite auront la forme :

$$= [x(X, t), F(x, \dot{x}, s-t)] \quad (\text{LC-5})$$

Objectivité (indifférence matérielle)

Définition : Une variable (scalaire ϕ , vectorielle u , tensorielle T) est objective si elle satisfait aux relations de transformations suivantes suite à un mouvement rigide (LC-3):

$$\phi = \phi \quad (\text{LC-6})$$

$$u = Qu \quad (\text{LC-7})$$

$$T = QTQ^T \quad (\text{LC-8})$$

Vitesse . La vitesse s’écrit :

$$\dot{x} = \dot{x}_0 + \dot{Q}x + Q\dot{x}$$

$$v = v_0 + \dot{Q}x + Qv$$

Le champ de vitesse n’est pas une grandeur objective.

Accélération . La dérivée de la vitesse donne :

$$\dot{v} = \dot{v}_0 + \dot{Q}x + \dot{Q}\dot{x} + \dot{Q}v + Q\dot{v}$$

$$a = \dot{a}_0 + \dot{Q}x + 2\dot{Q}v + Qa$$

L'accélération n'est pas une grandeur objective.

Gradient de la transformation - Déformations. En description matérielle, on a directement les relations suivantes:

(a) Transformation de fibre, volume et surface

$$F = [x(x, t)] [X, t] = Q(t)F(X, t)$$

$$F = QF \quad (\text{LC-9})$$

$$J = \det(QF) = \det Q \det F = J$$

$$J F^{-T} = J(QF)^{-T} = JQF^{-T} = Q(JF^{-T})$$

(b) Déformation de CAUCHY-GREEN

$$C = F^T F = C \quad (\text{LC-10})$$

On en déduit :

$$\dot{C} = (\dot{QF})^T QF + (QF)^T \dot{QF} = \dot{C} \quad (\text{LC-11})$$

Le tenseur de déformation de CAUCHY-GREEN et sa dérivée temporelle ne sont pas modifiés par un mouvement rigide du milieu continu. Ce sont des variables mécaniques définies sur la configuration initiale.

Gradient de la vitesse - Vitesse de déformation - Vitesse de rotation. En description spatiale, nous avons la transformée du gradient de la vitesse.

(a) Gradient de la vitesse. On a les deux définitions du gradient dans les deux configurations déformée et déformée suivie d'un mouvement rigide :

$$L = \text{grad}(v) \text{ et } L = \text{grad}_*(v)$$

$$\text{grad}(v) = \text{grad}_*(v) \text{ grad}(x) = L Q$$

$$\text{grad}(v) = \text{grad}[v_0 + \dot{Q}x + Qv] = \dot{Q}I + Q \text{grad}(v) = \dot{Q} + QL$$

Il en résulte :

$$L = QLQ^T + \dot{Q}Q^T \quad (\text{LC-12})$$

Ce qui montre que le gradient de la vitesse n'est pas un tenseur objectif. On peut effectuer

la décomposition :

$$D = \frac{1}{2}(L + L^T) = QLQ^T \quad (\text{LC-13})$$

$$W = \frac{1}{2}(L - L^T) = QWQ^T + \dot{Q}Q^T \quad (\text{LC-14})$$

La vitesse de déformation est objective, la vitesse de rotation ne l'est pas.

Contraintes

Contrainte de CAUCHY . D'une part, durant le mouvement rigide, l'élément de surface devient :

$$(ds) = \det QQ^{-T}(ds) = Qds$$

D'autre part, on fait l'hypothèse (souvent implicite) que la force est un vecteur objectif (Hypothèse Fondamentale - TRUESDELL) pour écrire :

$$(df) = Q(df) \quad (\text{LC-15})$$

La relation de CAUCHY donne alors :

$$(df) = (ds) = [Q(ds)]$$

$$(df) = Q(df) = Q[(ds)]$$

Il en résulte :

$$= Q Q^T \quad (\text{LC-16})$$

Contraintes de PIOLA-KIRCHHOFF . La transformation de ces contraintes est donnée par :

(a) PIOLA-KIRCHHOFF 1

$$P = J F^{-T}$$

$$P = JQ Q^T(QF)^{-T} = Q(JF^{-T}) = QP$$

La contrainte de PIOLA-KIRCHHOFF se comporte comme un vecteur (force).

(b) PIOLA-KIRCHHOFF 2

$$S = J F^{-1} F^{-T}$$

$$S = J(QF)^{-1}(Q Q^T)(QF)^{-T} = JF^{-1} F^{-T} = S.$$

La contrainte de PIOLA-KIRCHHOFF 2 n'est pas modifiée par un mouvement rigide.

Puissance de déformation

On rappelle les différentes expressions de la puissance de déformation et vérifier leur invariance:

(a) Puissance de déformation “nominale”

$$P_d(B, t) = \int_B \text{tr}(P^T \dot{F}) dV = \int_B \text{tr}((QP)^T (\dot{QF})) dV$$

$$P_d(B, t) = \int_B \text{tr}((QP)^T (\dot{QF} + Q\dot{F})) dV = \int_B \text{tr}((QP)^T (\dot{QF} + Q\dot{F})) dV$$

$$= \int_B \text{tr}(P^T \dot{F}) dV + \int_B \text{tr}(FP^T (Q^T \dot{Q})) dV$$

Ce qui montre que la puissance de déformation est une grandeur objective :

$$P_d(B, t) = P_d(B, t)$$

(b) Puissance de déformation “matérielle” (vérification)

$$P_d(B, t) = \int_B \text{tr}(S^T \dot{E}) dV = \int_B \text{tr}(S^T \dot{E}) dV = P_d(B, t)$$

(c) Puissance de déformation “spatiale”

$$P_d(B, t) = \int_B \text{tr}({}^T L) dV = \int_B \text{tr}((Q Q)^T (QLQ^T + \dot{Q}Q^T)) dV$$

$$= \int_B \text{tr}({}^T L) dV + \int_B \text{tr}({}^T Q^T \dot{Q}) dV$$

Ce qui nous donne $P_d(B, t) = P_d(B, t)$.

Indépendamment de la description, la puissance de déformation est une quantité objective.

Quelques classes de matériaux

Les lois que nous nous proposons d'étudier dans ce cours seront de la forme (la contrainte dépend de l'histoire du gradient de la transformation) :

$$= [(X, t), F(X, s \leq t)]$$

De même que pour la localisation, on peut effectuer un développement limité dans le temps :

$$= [(X, t), F(X, t) + \dot{F}(X, t)(t-s) + \dots]$$

Ce qui nous donne les lois du type :

$$= [(X, t), F(X, t), \dot{F}(X, t), \dots]$$

Si besoin est, sans nuire à la généralité des résultats, on peut oublier l'argument densité car :

$$J = \quad =$$

Solides élastiques

Définition . Un solide élastique est un milieu continu dont le tenseur de contrainte est fonction de la valeur à l'état déformé du gradient de la transformation :

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma} [(X, t), F(X, t)] \quad (\text{LC-17})$$

Théorème. La réponse d'un milieu continu élastique soumis à des transformations finies est objective (indépendante de l'observateur) si et seulement si :

$$\hat{\sigma}(QF) = Q \hat{\sigma}(F) Q^T \quad Q \in O^+ \quad F \in \text{Lin}^+ \quad (\text{LC-18})$$

(Preuve). Lin^+ est l'ensemble des transformations à déterminant strictement positif. La réponse est objective si la forme de la loi de comportement est indépendante du mouvement :

$$x = x_0(t) + Q(t)x(X, t)$$

$$= \hat{\sigma}(F)$$

$$= \hat{\sigma}(F)$$

Or les deux variables se transforment comme suivent :

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}(QF) &= Q \hat{\sigma}(F) Q^T \\ F &= QF \end{aligned}$$

On peut vérifier que la condition est aussi suffisante•

Du fait que physiquement la réponse d'un matériau élastique doit toujours être indépendante de l'observateur, l'équation (LC-18) doit toujours être vérifiée.

Lois de comportement réduites (NOLL) . Pour un solide élastique, l'objectivité implique l'existence d'une fonction tensorielle $\hat{S}(C)$ telle que :

$$\hat{\sigma}(F) = F \hat{S}(C) F^T \quad (\text{LC-19})$$

(Preuve). En partant de l'objectivité, nous pouvons écrire $\hat{\sigma}(QF) = Q \hat{\sigma}(F) Q^T$ pour toute rotation $Q(t)$. En posant $Q = R^T$ où R est la rotation dans la décomposition polaire de $F = RU$:

$$\hat{\sigma}(U) = R^T \hat{\sigma}(F) R \quad \hat{\sigma}(F) = R \hat{\sigma}(U) R^T \quad (\text{Relation de CELLERIER-RICHTER})$$

En reintroduisant la décomposition polaire on a :

$$\hat{\sigma}(F) = F U^{-1} \hat{\sigma}(U) (F U^{-1})^T = F U^{-1} \hat{\sigma}(U) U^{-1} F^T$$

Comme $U = \sqrt{C}$, alors il existe $\hat{\sigma}(C) = \sqrt{C}^{-1} \hat{\sigma}(\sqrt{C}) \sqrt{C}^{-1}$ telle que :

$$\hat{\sigma}(F) = F \hat{\sigma}(C) F^T.$$

La réciproque est vraie car un mouvement rigide modifie le gradient de la transformation en $F = QF$ et donne $\hat{\sigma}(F) = QF \hat{\sigma}(C) F^T Q^T = Q \hat{\sigma}(C) Q^T$.

Remarque. Ainsi, une loi de comportement élastique en transformations finies est entièrement définie par une fonction tensorielle entre la contrainte de PIOLA-KIRCHHOFF 2 et la déformation de CAUCHY-GREEN, ou alternativement la déformation de GREEN-LAGRANGE.

Quelques exemples .

(a) *Fluide parfait élastique.*

$$S = -p(J)I \quad S = -Jp(J)F^{-1}IF^{-T} = -Jp(J)C^{-1}$$

(b) *Matériaux élastiques de KIRCHHOFF-St VENANT (valable en déformations modérées, ou en rotations finies-déformations infinitésimales)*

$$S = \text{tr}(E)I + 2\mu E$$

(c) *Matériaux incompressibles de MOONEY-RIVLIN (transformations finies de certains matériaux caoutchouteux)*

$$S = -JpC^{-1} + \mu \left(\frac{1}{2}I + \frac{1}{2}C \right)$$

(d) *(Sans démonstration) La loi de comportement la plus générale d'un matériau élastique isotrope peut toujours se mettre sous la forme (théorie des représentations des fonctions tensorielles) :*

$$S = \sigma_{-1}(I_1, I_2, I_3)C^{-1} + \sigma_0(I_1, I_2, I_3)I + \sigma_1(I_1, I_2, I_3)C \quad (\text{LC-20})$$

dans laquelle les fonctions $\sigma_i(I_1, I_2, I_3)$ ont pour arguments des invariants du tenseur de CAUCHY-GREEN. L'identification expérimentale des matériaux élastiques non linéaires passe par la recherche des fonctions constitutives σ_i non linéaires de manière générale. Un développement en C^n n'est souvent pas judicieux.

Fluides visqueux

Définition . Un fluide visqueux est un milieu continu dont la contrainte est définie par une relation du type :

$$S = \hat{\sigma} [(X, t), L(X, t)] \quad (\text{LC-21})$$

Lois de comportement réduites . Pour satisfaire à l'objectivité, la loi de comportement d'un fluide visqueux prend nécessairement la forme :

$$\hat{\sigma}(\rho, L) = \hat{\sigma}(\rho, D) \quad (\text{LC-22})$$

(Preuve). L'objectivité impose, moyennant l'équation (LC-12), :

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}(\rho, L) &= \hat{\sigma}(\rho, QLQ^T + \dot{Q}Q^T) \\ &= Q\hat{\sigma}(\rho, L)Q^T \end{aligned}$$

avec $Q(t)$ quelconque. On choisit une rotation particulière $Q = I$ à l'instant t avec une vitesse $\dot{Q}Q^T = -W$, opposée à la vitesse de rotation :

On en déduit :

$$\hat{\sigma}(\rho, L) = \hat{\sigma}(\rho, L - W) = \hat{\sigma}(\rho, D). \text{ La réciproque est vraie.}$$

Exemple.

(a) Les fluides de REINER-RIVLIN sont les fluides "isotropes" les plus générales dont les lois de comportement sont de la forme :

$$\hat{\sigma} = -p(\rho, D_1)I + \alpha_1(\rho, D_1)D + \alpha_2(\rho, D_1)D^2 \quad (\text{LC-23})$$

dans laquelle les fonctions scalaires (p, α_1, α_2) ont pour arguments la densité et les invariants du tenseur vitesse de déformation, par exemple :

$$D_1 = \text{tr}(D) \quad D_2 = \frac{1}{2}[\text{tr}^2(D) - \text{tr}(D^2)] \quad D_3 = \det(D).$$

Un fluide linéaire (STOKES) prend la forme particulière :

$$\hat{\sigma} = -pI + \text{tr}(D)I + 2\mu D.$$

(b) Fluide "lagrangien". En suivant un autre chemin pour le développement, on peut également aboutir à la relation :

$$\hat{\sigma}(\rho, L) = R\hat{\sigma}(\rho, \dot{U}U^{-1})R^T = FU^{-1}\hat{\sigma}(\rho, \dot{U}U^{-1})U^{-1}F^T$$

Cette loi peut être assimilée à une description lagrangienne d'un fluide visqueux. néanmoins, elle n'est pas toujours applicable (sauf à quelques applications particulières). Exemple du fluide parfait :

$$S = -JpC^{-1} \quad \hat{\sigma} = -pI.$$

Solides viscoélastiques

Définition . Un solide viscoélastique est un milieu continu dont la contrainte est fonction du gradient de la transformation et de sa dérivée temporelle :

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}(\cdot, F, \dot{F}) \quad (\text{LC-24})$$

Alternativement, puisque $\dot{F} = LF$, on peut adopter la définition :

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}(\cdot, F, L) \quad (\text{LC-25})$$

Lois de comportement réduites . Pour un solide viscoélastique objectif, il existe une fonction tensorielle $\hat{S}(\cdot, C, \dot{C})$ avec laquelle la contrainte s'écrit :

$$\hat{\sigma}(\cdot, F, L) = F \hat{S}(\cdot, C, \dot{C}) F^T \quad (\text{LC-26})$$

(Preuve). En imposant l'objectivité de la loi de comportement, on a :

$$\hat{\sigma}(\cdot, F, \dot{F}) = \hat{\sigma}(\cdot, QF, QLQ^T + \dot{Q}Q^T)$$

avec $Q(t)$ quelconque. Elle doit être aussi vérifiée pour la rotation particulière $Q = R^T$, extraite de la décomposition polaire $F = RU$. Dans ce cas, on a :

$$\dot{Q}Q^T = \dot{R}^T R = -\dot{R}R^T = -$$

Ce qui nous donne, moyennant la décomposition de L en fonction des tenseurs U , \dot{U} et R :

$$\begin{aligned} &= \hat{\sigma}(\cdot, U, R^T L R -) = \hat{\sigma}(\cdot, U, \dot{U} U^{-1}) \\ &= R^T \hat{\sigma}(\cdot, F, L) R \end{aligned}$$

Ce qui implique :

$$\hat{\sigma}(\cdot, F, L) = R \hat{\sigma}(\cdot, U, \dot{U} U^{-1}) R^T$$

Finalement, en re-introduisant la décomposition polaire, on trouve :

$$\hat{\sigma}(\cdot, F, L) = F \underbrace{U^{-1} \hat{\sigma}(\cdot, U, \dot{U} U^{-1}) U^{-1}}_{\hat{S}(\cdot, C, \dot{C})} F^T$$

De même que pour la loi élasticité, $U = \sqrt{C}$ et la loi de comportement objective s'écrit donc :

$$\hat{\sigma}(\cdot, F, L) = F \hat{S}(\cdot, C, \dot{C}) F^T \cdot$$

Remarque . La loi de comportement d'un solide viscoélastique est entièrement définie par une relation entre la contrainte de PIOLA-KIRCHHOFF 2 et le tenseur de CAUCHY-GREEN et sa dérivée temporelle.

Exemple .

Pour les solides viscoélastiques, on peut isoler un comportement purement élastique :

$$S = S_e(C) + S_v(C, \dot{C})$$

Chacun des termes représente la réponse élastique, la réponse visqueuse (effet mémoire courte).

(a) Cas concret. Résultats expérimentaux bruts la contrainte de PIOLA-KIRCHHOFF 1 est mesurée en fonction de la déformation avec des vitesses de déformations différentes.

△	exp. 24%/s
— —	theor. 24%/s
□	exp. 17%/s
- - - -	theor. 17%/s
◇	exp. 11%/s
.	theor. 11%/s
○	exp. 0.6%/s
———	theor. 0.6%/s

(b) L'identification des lois constitutives qui satisfont ces courbes "au mieux" et qui ne violent pas la thermomécanique (suite du cours) donne des exemples de lois de comportement de matériaux soumis à des transformations finies.

Loi de comportement élastique non linéaire (incompressible) après plusieurs tentatives

$$S_e = -pC^{-1} + (2 \exp[(I_1 - 3)] - I_1)I + C.$$

où et sont les constantes du matériau dans cette identification et $I_1 = tr(C)$ La loi de comportement visqueux associée est :

$$S_v = \eta(I_1 - 3)\dot{C}, \quad \eta \text{ est la constante visqueuse du matériau.}$$

Solides "non simples"

Certains matériaux, pour lesquels les effets d'échelles sont importantes, nécessitent une extension du principe de l'action locale. Pour ces matériaux, les équations de compatibilité ne sont plus vérifiées et les variables primales incluent la torsion et la courbure (Par exemple : cas des matériaux "plastiques").

Sans entrer dans le détail, différentes lois de comportement basées sur le non respect de la compatibilité peuvent être proposées pour modéliser des milieux solides avec micro-fissuration interne ou des déformation plastiques (glissement internes).

$$S = \hat{S}(C, \dots) \tag{LC-27}$$

dans laquelle des variables internes supplémentaires sont introduites pour décrire la distribution de discontinuités dans le matériau :

$$\frac{K}{IJ} = \frac{K}{IJ} - \frac{K}{JI} \text{ (tenseur torsion)}$$

$$\frac{L}{KMN} = \frac{L}{KM} \frac{1}{X^N} - \frac{L}{KN} \frac{1}{X^M} + \frac{R}{KM} \frac{L}{RN} - \frac{R}{KN} \frac{L}{RM} \text{ (tenseur courbure)}$$

Dans ce genre de matériaux, les coefficients de connexion ne dérivent pas du tenseur de CAUCHY-GREEN (Milieux continus faiblement continus), mais constituent des variables indépendantes.

EXERCICES CHOISIS

Exercice 1

On considère un milieu continu assimilé à cube unité dans sa configuration initiale $\{\mathbf{G}_{10}, \mathbf{G}_{20}, \mathbf{G}_{30}\}$, avec $\mathbf{G}_{I0} \cdot \mathbf{G}_{J0} = \delta_{IJ}$. Le cube est transformé en un rhomboèdre de côté unité $\{\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3\}$ avec l'angle entre les côtés au sommet O de $\frac{\pi}{3}$. On remarque que cette déformation est uniforme. Calculer les valeurs propres de la déformation de Cauchy-Green. Quelles sont les directions principales de cette déformation? Calculer les allongements principaux.

Exercice 2

On considère un milieu continu dont le champ de gradient de la transformation est noté \mathbf{F} . Montrer que les tenseurs vitesse de déformation et vitesse de rotation peuvent s'écrire :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \mathbf{R} (\dot{\mathbf{U}} \mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-1} \dot{\mathbf{U}}) \mathbf{R}^T$$

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} \mathbf{R} (\dot{\mathbf{U}} \mathbf{U}^{-1} - \mathbf{U}^{-1} \dot{\mathbf{U}}) \mathbf{R}^T$$

dans lesquelles \mathbf{U} est le tenseur d'allongement, \mathbf{R} la rotation associée à la décomposition polaire de Cauchy et $\dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T$. On constate ainsi que la vitesse de rotation de la fibre matérielle est constituée d'une rotation "rigide" correspondant à la décomposition polaire et d'une rotation due à la déformation (cette dernière est nulle lorsque la fibre est alignée selon les directions principales).

Exercice 3

Considérer la transformation d'un milieu continu dont le champ de vitesse est noté \mathbf{v} . Soit \mathbf{u} un vecteur unitaire porté par une fibre matérielle dans la configuration déformée. En supposant que \mathbf{u} reste unitaire au cours de la transformation, calculer sa dérivée temporelle. Le fait que la fibre \mathbf{u} reste unitaire modélise par exemple une inextensibilité dans sa direction. Utiliser le résultat pour calculer la dérivée temporelle des vecteurs propres de la vitesse de déformation \mathbf{D} .

Exercice 4

On considère une transformation bi-dimensionnelle (c'est-à-dire que toute fibre selon la direction 3, par exemple, ne se déforme pas). On note \mathbf{C} le tenseur de Cauchy-Green et \mathbf{U} le tenseur d'allongement, $\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}}$. Rappel : Le tenseur d'allongement est symétrique et défini positif.

(a) En posant $I_C = \text{tr} \mathbf{C}$ et $II_C = \det \mathbf{C}$, montrer la relation :

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{I_C + 2\sqrt{II_C}}} (\mathbf{C} - \sqrt{II_C} \mathbf{I}) \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Indication : Utiliser le théorème de *Cayley-Hamilton* sur les matrices en 2D.

(b) La transformation d'un milieu continu est définie par la relation $\mathbf{x} = \mathbf{X}$ dans laquelle \mathbf{x} définit sa position actuelle et \mathbf{X} sa position initiale, les deux vecteurs par rapport à un seul repère de l'espace $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ (base orthonormée directe). Soit un cylindre de rayon unité dont l'axe est dans la direction 3. Le cylindre se transforme selon:

$$x^1 = \sqrt{3} X^1 + X^2$$

$$x^2 = 2 X^2$$

$$x^3 = X^3$$

Vérifier que cette transformation est bi-dimensionnelle. Déterminer le tenseur des allongements \mathbf{U} . Calculer les allongements principaux (valeurs propres de \mathbf{U}) et les directions principales ($\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3$). Quelle est la transformée d'une section du cylindre? Décomposer la transformation tangente \mathbf{F} et en déduire la rotation \mathbf{R} .

Exercice 5

On considère le mouvement d'un milieu continu en transformations finies. Pour chaque point matériel du milieu, la transformation est définie par la relation $\mathbf{x} = \mathbf{X}(t)$ dans laquelle \mathbf{x} définit sa position à l'instant t et \mathbf{X} sa position à l'instant initial $t = 0$, les deux vecteurs par rapport à un seul repère de l'espace $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ (base orthonormée directe). On étudie le mouvement particulier défini par :

$$x^1 = X^1 (1 + t)$$

$$x^2 = X^2 (1 + t)^2$$

$$x^3 = X^3 (1 + t^2)$$

(a) Calculer le gradient de la transformation (transformation linéaire tangente) $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$. En déduire le tenseur de Cauchy-Green $\mathbf{C}(\mathbf{X}, t)$ et le tenseur de déformation de Green-Lagrange $\mathbf{E}(\mathbf{X}, t)$.

(b) Calculer la vitesse $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{X}, t)$ et l'accélération $\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{X}, t)$ en description matérielle. En déduire la vitesse $\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t)$ et l'accélération $\bar{\mathbf{a}}(\mathbf{x}, t)$ en description spatiale. Vérifier que :

$$\bar{\mathbf{a}}(\mathbf{x}, t) = \frac{d}{dt} \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{grad} \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) [\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t)]$$

(b) Calculer le tenseur vitesse de déformation $\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)$. Un matériau visqueux est défini par la loi de comportement $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = tr[\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)] \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)$. calculer les composantes du tenseur de Piola-Kirchhoff 2 correspondant.

Exercice 6

On considère la transformation d'un milieu continu, appelée glissement simple, définie par :

$$x^1 = X^1 + tX^2$$

$$x^2 = X^2$$

$$x^3 = X^3$$

dans laquelle (X^1, X^2, X^3) sont les coordonnées d'un point matériel quelconque dans un repère orthonormé $\{O, \mathbf{G}_{10}, \mathbf{G}_{20}, \mathbf{G}_{30}\}$ à l'instant initial $t = 0$. (x^1, x^2, x^3) sont les coordonnées de ce même point à l'instant t . $t > 0$ est une constante.

(a) Déterminer les transformées $\{\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3\}$ dans la configuration déformée des trois fibres matérielles initialement confondues avec $\{\mathbf{G}_{10}, \mathbf{G}_{20}, \mathbf{G}_{30}\}$ dans la configuration non déformée. En déduire les composantes du tenseur de Cauchy-Green \mathbf{C} . Calculer la dérivée temporelle $\dot{\mathbf{C}}$. Déterminer les valeurs propres et directions propres de la dérivée temporelle $\dot{\mathbf{C}}$ dans le cas particulier où t est infiniment petit.

(b) En partant de la vitesse des fibres matérielles $\{\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3\}$, calculer les composantes du tenseur vitesse de déformation $\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}[\mathbf{grad} \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{grad}^T \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t)]$ dans la base tensorielle $\mathbf{G}^I \mathbf{G}^J$. Comparer avec les résultats de (a) sur la dérivée totale de $\dot{\mathbf{C}}$.

(c) Déterminer les transformées $\{\mathbf{G}^1, \mathbf{G}^2, \mathbf{G}^3\}$ des trois éléments de surface matérielles dont les vecteurs normaux sont dirigés initialement selon $\{\mathbf{G}^{10}, \mathbf{G}^{20}, \mathbf{G}^{30}\}$ dans la configuration non déformée.

(d) Pour une transformation quelconque du milieu continu (pas seulement glissement simple), on considère une fibre matérielle \mathbf{M} unitaire $\|\mathbf{M}\| = 1$ de la configuration initiale et qui se transforme en un vecteur dont la direction (et sens) est selon le vecteur unitaire \mathbf{m} dans la configuration déformée. Pour une transformation quelconque du milieu continu, montrer que $\mathbf{m} = \mathbf{F}(\mathbf{M})$ en notant \mathbf{F} le gradient de la transformation et dans laquelle $\mathbf{m} = \sqrt{\mathbf{M} \cdot \mathbf{C}(\mathbf{M})}$. Montrer que $d(\ln \|\mathbf{m}\|)/dt = \mathbf{m} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{m})$ (taux d'allongement logarithmique). Calculer le taux d'allongement logarithmique $d(\ln \|\mathbf{m}\|)/dt$ au cours d'un glissement simple dans la direction $\mathbf{M} = M^1 \mathbf{G}_{10} + M^2 \mathbf{G}_{20}$. Comment évolue asymptotiquement ce taux pour t très grand?

Exercice 7

Le but de cet exercice est de comparer l'efficacité de deux types de transformations finies (écoulement de glissement et écoulement d'extension) dans un processus de mélange de milieux continus immiscibles.

On considère le mouvement d'un milieu continu en transformations finies. Pour chaque point matériel du milieu, la transformation est définie par la relation $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ dans laquelle \mathbf{x} définit sa position à l'instant t et \mathbf{X} sa position à l'instant initial $t = 0$, les deux vecteurs par rapport à un seul repère de l'espace $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ (base orthonormée directe).

(a) Dans un premier temps, on considère les transformations dont le champ de vitesse est de la forme $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{L}(t) [\mathbf{x}]$ où le tenseur \mathbf{L} ne dépend pas de la position \mathbf{x} (le tenseur \mathbf{L} est multiplié par le vecteur \mathbf{x}). Ecrire les tenseurs vitesse de déformation $\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)$ et vitesse de rotation $\mathbf{W}(\mathbf{x}, t)$ en fonction de \mathbf{L} .

(b) **Cas particulier 1** : (Transformations bi-dimensionnelles) $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ où α et β sont deux constantes réelles. Dessiner le champ de vitesse pour les cas suivants :

- () $\alpha = -1$;
- () $\alpha = 0$;
- () $\alpha = 1$.

(Pour cela, se limiter à représenter les champs de vitesse dans le plan $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$, le long des deux axes $O\mathbf{e}_1$ et $O\mathbf{e}_2$). A quoi correspondent ces mouvements?

Déterminer la vitesse \mathbf{v} en fonction de \mathbf{L} , \mathbf{X} et de t . Esquisser les formes des trajectoires des points matériels pour :

- () $\alpha = -1$;
- () $\alpha = 0$;
- () $\alpha = 1$.

(c) **Cas particulier 2** : (Glissement) $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On considère dans la configuration initiale du milieu continu une fibre matérielle unitaire $\mathbf{M} = M_1\mathbf{e}_1 + M_2\mathbf{e}_2 + M_3\mathbf{e}_3$, $\|\mathbf{M}\| = 1$. Exprimer \mathbf{x} en fonction de la constante α , de \mathbf{X} et de t . En déduire le gradient de transformation \mathbf{F} et le tenseur de Cauchy-Green \mathbf{C} .

On définit l'élongation au cours de la transformation de la fibre \mathbf{M} par $\sqrt{(\mathbf{M} \cdot \mathbf{M})} : \mathbf{C}$. Exprimer la dérivée :

$$\frac{d}{dt} \ln(\quad)$$

en fonction de α , \mathbf{M} et t . Calculer la limite (efficience asymptotique en élongation du glissement) :

$$\lim_t \frac{1}{\sqrt{\mathbf{D} : \mathbf{D}}} \frac{d}{dt} \ln(\quad)$$

Discuter sur l'orientation initiale de la fibre \mathbf{M} .

(d) **Cas particulier 3** : (Extension) $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$. On considère de nouveau dans la configuration initiale une fibre matérielle unitaire \mathbf{M} , $\|\mathbf{M}\| = 1$. Calculer le gradient de transformation \mathbf{F} et le tenseur de Cauchy-Green \mathbf{C} . On rappelle l'élon-

gation $\sqrt{(\mathbf{M} - \mathbf{M}) : \mathbf{C}}$. Calculer la limite (efficience asymptotique en élongation de l'extension):

$$\lim_t \frac{1}{\sqrt{\mathbf{D} : \mathbf{D}}} \frac{d}{dt} \ln(\dots)$$

Comparer avec le cas du glissement. Discuter.

(e) (*Question indépendante*) On considère cette fois les transformations du milieu continu dont le champ de vitesse est de la forme $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{K} [\mathbf{X}]$ où le tenseur \mathbf{K} est constant. Exprimer les tenseurs vitesse de déformation et vitesse de rotation :

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} (\mathbf{grad} \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{grad}^T \bar{\mathbf{v}}) \quad \mathbf{W} = \frac{1}{2} (\mathbf{grad} \bar{\mathbf{v}} - \mathbf{grad}^T \bar{\mathbf{v}})$$

et l'accélération $\bar{\mathbf{a}}$ en fonction de \mathbf{K} , \mathbf{x} et t .

Exercice 8

Deux observateurs vont percevoir deux mouvements différents d'un milieu continu en transformations finies). Les deux transformations observées différeront par un mouvement rigide du milieu continu. Le mouvement rigide peut être interprété comme la combinaison d'une rotation et d'une translation après la transformation $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$. $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0(t) + \mathbf{Q}(t)[\mathbf{X}, t]$

(a) Montrer que le tenseur de déformation de Cauchy-Green $\mathbf{C}(\mathbf{X}, t)$ et sa dérivée temporelle $\dot{\mathbf{C}}(\mathbf{X}, t)$ ne sont pas modifiés par un mouvement rigide du milieu continu.

(b) Montrer que la seconde contrainte de Piola-Kirchhoff $\mathbf{S}(\mathbf{X}, t)$ n'est pas modifiée par un mouvement rigide.

Exercice 9

On considère un milieu continu cylindrique de section circulaire dont le rayon et la longueur initiale sont R et H . Quand on lui applique sur ses deux bases deux forces opposées \mathbf{F} (réparties uniformément sur ces bases) dirigées suivant son axe et sur sa surface latérale une pression normale uniforme p , son rayon et sa longueur deviennent r et h . On suppose que la direction de son axe ne change pas et on suppose la déformation et la contrainte uniforme.

(a) Quand le rayon et la longueur varient avec la vitesse $\frac{dr}{dt}$ et $\frac{dh}{dt}$, calculer la puissance de déformation par unité de volume dans sa configuration actuelle. En déduire le tenseur de contrainte de Cauchy.

(b) Calculer le second tenseur de contrainte Piola-Kirchhoff \mathbf{S} . Quel est la puissance de déformation par unité de volume dans sa configuration initiale? Déterminer le premier tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff \mathbf{P} .

Exercice 10

On considère un milieu continu soumis à une transformation finie.

(a) La transformation du milieu à partir de sa configuration initiale (de référence) est une dilatation isotrope (intensité λ) suivie d'une rotation globale \mathbf{Q} . Dans sa configuration actuelle, ce milieu continu est soumis à une pression isotrope p . Déterminer les tenseurs de contrainte de Piola-Kirchhoff 1 et 2. Ecrire la puissance de déformation.

(b) La transformation d'un milieu continu à partir de sa configuration initiale (de référence) est une élongation unidimensionnelle (intensité λ et sans "respiration" dans les directions transversales, selon une direction \mathbf{b} , \mathbf{b} étant unitaire) suivie d'une rotation globale \mathbf{Q} . On suppose que la contrainte de Piola-Kirchhoff 2 est donnée en fonction de la déformation de Green-Lagrange par la loi linéaire élastique $\mathbf{S} = \lambda \operatorname{tr}(\mathbf{E}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E}$. Déterminer les tenseurs de contrainte \mathbf{S} , \mathbf{P} et \mathbf{T} . Exprimer la composante de la contrainte S_{bb} en fonction de λ et μ . Discuter.

(c) Considérer l'exemple (b) dans le cas où le matériau est incompressible (transformation isovolumique) donc peut "respirer" dans les directions orthogonales à \mathbf{b} .