Thermomécanique des milieux continus

Indifférence matérielle. Deux observateurs différents vont percevoir deux mouvements différents d'un milieu continu $\mathcal{B}$ en transformations finies. Les deux transformations observées différeront par un mouvement rigide du milieu continu. Ce mouvement rigide peut être interprété comme la combinaison d'une rotation et d'une translation après la transformation :

$$\mathbf{x} = \varphi\left(\mathbf{X}, t\right), \qquad \mathbf{x}^* = \mathbf{x}_0\left(t\right) + \mathbf{Q}\left(t\right)\ \left(\mathbf{x}\right)$$

1. Montrer que le tenseur de déformation de Cauchy-Green $\mathbf{C}\left(\mathbf{X}, t\right)$ et sa dérivée temporelle $\dot{\mathbf{C}}\left(\mathbf{X}, t\right)$ ne sont pas modifiés par un mouvement rigide du milieu continu. Conclure sur la fonction énergie libre $\Psi\left(\mathbf{C}\right)$ d'un matériau élastique.
2. Montrer que la seconde contrainte de Piola-Kirchhoff $\mathbf{S}\left(\mathbf{X}, t\right)$ n'est pas non plus modifiée par un mouvement rigide supplémentaire du milieu continu. Pour cette seconde question, il sera nécessaire d'évoquer l'hypothèse émise par C. Truesdell stipulant qu'un vecteur force se transforme comme une fibre matérielle.

Solution. La transformation finie du milieu continu $\mathcal{B}$ est décrite par rapport à deux référentiels en mouvement rigide l'un par rapport à l'autre.

1. On rappelle les deux transformations du milieu continu et le mouvement rigide supplémentaire :
$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t), \qquad \mathbf{x}^* = \mathbf{x}_0(t) + \mathbf{Q}(t)\ (\mathbf{x})$$
On en déduit la tranformation composée :
$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_0(t) + \mathbf{Q}(t)\ [\varphi(\mathbf{X}, t)]$$
Les gradients de la transformation s'écrivent :
$$\begin{aligned} \mathbf{F} &:= \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{X}}, \\ \mathbf{F}^* &:= \frac{\partial\varphi^*}{\partial\mathbf{X}}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{Q}(t)\ \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{X}}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{Q}\ \mathbf{F} \end{aligned}$$
On en déduit le tenseur de déformation de Cauchy-Green :
$$\mathbf{C}^* := \mathbf{F}^{*\mathrm{T}}\mathbf{F}^* = (\mathbf{Q}\ \mathbf{F})^{\mathrm{T}}\ \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F} = \mathbf{C}$$
Un mouvement rigide supplémentaire ne modifie pas le tenseur métrique de Cauchy-Green. Par conséquent, toute fonction scalaire, dont l'énergie libre $\Psi(\mathbf{C}^*) = \Psi(\mathbf{C})$, n'est pas modifiée par ce changement d'observateur.
2. Pour les deux observateurs, la seconde contrainte de Piola-Kirchhoff est donnée par :
$$\begin{aligned} \mathbf{S} &:= \mathrm{Det}\mathbf{F}\ \mathbf{F}^{-1}\sigma\mathbf{F}^{-\mathrm{T}} \\ \mathbf{S}^* &:= \mathrm{Det}\mathbf{F}^*\ \mathbf{F}^{*-1}\sigma^*\mathbf{F}^{*-\mathrm{T}} = \mathrm{Det}\mathbf{F}\ \mathbf{F}^{-1}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\sigma^*\mathbf{Q}\mathbf{F}^{-\mathrm{T}} \end{aligned}$$
On peut alors revenir sur la définition de la contrainte de Cauchy pour ces deux observateurs :
$$\begin{aligned} \mathbf{p}_n &:= \sigma(\mathbf{n}) \\ \mathbf{p}_n^* &:= \sigma^*(\mathbf{n}^*) \end{aligned}$$
dans laquelle on a la transformation de la facette entre les deux observateurs :
$$\mathbf{n}^*\ da^* = \mathrm{Det}\mathbf{Q}\ \mathbf{Q}^{-\mathrm{T}}(\mathbf{n})\ da = \mathbf{Q}(\mathbf{n})\ da, \Longrightarrow \mathbf{n}^* = \mathbf{Q}(\mathbf{n})$$
D'où la transformation du vecteur contrainte, moyennant le théorème de Cauchy, :
$$\mathbf{p}_n^* = \sigma^*(\mathbf{n}^*) = \sigma^*\mathbf{Q}(\mathbf{n})$$
On ne peut pas aller plus loin sans une *hypothèse supplémentaire*, énoncée par C. Truesdell postulant que les vecteurs forces dans un milieu continu se transforme comme une fibre matérielle (et non pas comme une facette matérielle par exemple) :
$$\mathbf{f}^* := \mathbf{Q}\ (\mathbf{f}), \qquad \Longrightarrow \mathbf{p}_n^* = \mathbf{Q}(\mathbf{p}_n) = \mathbf{Q}\ \sigma(\mathbf{n}) = \sigma^*\mathbf{Q}(\mathbf{n})$$
Nous en déduisons, puisque $\mathbf{n}$ est quelconque, :
$$\sigma^* = \mathbf{Q}\ \sigma\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}, \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{S}^* = \mathbf{S}$$

Glissement simple. On considère un milieu continu $\mathcal{B}$ dont densité dans la configuration initiale ρ_0 est supposée uniforme. Dans tout le problème nous utiliserons un système d'axes orthonormés direct $(O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)$ par rapport auquel les deux configurations initiale et déformée sont définies. La transformation homogène à étudier $\varphi : \mathcal{B} \longrightarrow \varphi(\mathcal{B})$ est le glissement simple sinusoidal :

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t) = [X_1 + X_2\ \gamma\ \sin(\omega\ t)]\quad \mathbf{e}_1 + X_2\ \mathbf{e}_2 + X_3\ \mathbf{e}_3 \qquad \gamma > 0$$

1. Calculer les tenseurs de déformation de Cauchy-Green $\mathbf{C}$ et de Green-Lagrange $\mathbf{E}$.
2. On suppose que le champ de température reste uniforme dans $\mathcal{B}$ (et dans $\varphi(\mathcal{B})$) et constante $\forall t \geq 0$. Il n'y a pas d'apport de chaleur ni sur la frontière $\partial\mathcal{B}$ ni dans le volume $\mathcal{B}$. La loi du comportement du milieu continu est définie par son énergie libre de Helmholtz :

$$\psi(\mathbf{C}) = \frac{\lambda}{2}\ \mathrm{Tr}^2\mathbf{E} + \mu\ \mathrm{Tr}\mathbf{E}^2$$

   dans laquelle $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et $\mu \in \mathbb{R}_+$ sont des constantes du matériau. On notera ρ_0 la densité du matériau dans sa configuration initiale.

   (a) Calculer le second tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff $\mathbf{S}$ en fonction de $\mathbf{E}$ pour une transformation quelconque du milieu continu. Appliquer pour le cas du glissement simple sinusoidal.

   (b) Exprimer la puissance de déformation par unité de volume initial (dV) lors du glissement simple sinusoidal. Calculer le travail de déformation interne au cours d'un cycle $t_i = 0 \leq t \leq t_f = \dfrac{2\pi}{\omega}$. Considérer le cas où t_f est quelconque.
3. A partir de la configuration déformée $\varphi(\mathcal{B})$ due au glissement simple sinusoidal, on superpose un mouvement rigide défini par une rotation $\mathbf{Q}(t)$ autour de l'axe $O\mathbf{e}_3$ et d'angle $\alpha(t)$ suivie d'une translation $\mathbf{x}_0(t)$. La composition du glissement simple sinusoidal et du mouvement rigide est notée $\mathbf{x}^* = \varphi^*(X, t)$.

   (a) Donner l'expression du second tenseur de Piola-Kirchhoff $\mathbf{S}^*$ en fonction du tenseur de Green-Lagrange $\mathbf{E}^*$ pour la transformation composée φ^*.

   (b) Calculer les tenseurs de contrainte de Cauchy dans les deux cas suivants

      i. σ lors de la transformation glissement simple sinusoidal $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t)$,

      ii. σ^* lors de la transformation composée $\mathbf{x}^* = \varphi^*(\mathbf{X}, t)$. Commenter.

Solution. La transformation homogène à étudier $\varphi : \mathcal{B} \longrightarrow \varphi(\mathcal{B})$ est le glissement simple sinusoidal :

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t) = [X_1 + X_2\ \gamma\ \sin(\omega\ t)]\quad \mathbf{e}_1 + X_2\mathbf{e}_2 + X_3\ \mathbf{e}_3 \qquad \gamma > 0$$

1. Ce qui nous donne directement la matrice du gradient de la transformation $\mathbf{F}$:

$$F_{iI} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma\ \sin(\omega t) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Le tenseur métrique de Cauchy-Green est directement calculé par $\mathbf{C} := \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}$:

$$C_{IJ} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma\ \sin(\omega t) & 0 \\ \gamma\ \sin(\omega t) & 1 + \gamma^2\ \sin^2(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   La déformation de Green-Lagrange $\mathbf{E} := \dfrac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbb{I})$ devient :

$$E_{IJ} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \gamma\ \sin(\omega t) & 0 \\ \gamma\ \sin(\omega t) & \gamma^2\ \sin^2(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. La contrainte de Piola-Kirchhoff $\mathbf{S}$ pour cette énergie libre isotherme prend la forme classique (modèle de matériau de Kirchhoff-St venant) en utilisant l'inégalité de Clausius-Duhem :

$$\left(\mathbf{S} - \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}}\right) : \dot{\mathbf{E}} \geq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{S} = \lambda \rho_0 \mathrm{Tr}\mathbf{E}\ \mathbb{I} + 2\mu\rho_0\mathbf{E}$$

   dans laquelle on peut absorber la densité dans les constantes pour écrire :

$$\mathbf{S} = \lambda \mathrm{Tr}\mathbf{E}\ \mathbb{I} + 2\mu\mathbf{E}$$

   Pour le glissement simple, les composantes s'écrivent en calculant d'abord la trace de $\mathbf{E}$:

$$\mathrm{Tr}\mathbf{E} = \frac{1}{2}\gamma^2\ \sin^2(\omega t)$$

   puis la matrice des contraintes :

$$S_{IJ} = \begin{pmatrix} \dfrac{\lambda}{2}\gamma^2\ \sin^2(\omega t) & \mu\ \gamma\ \sin(\omega t) & 0 \\ \mu\ \gamma\ \sin(\omega t) & \left(\dfrac{\lambda}{2} + \mu\right)\gamma^2\ \sin^2(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\lambda}{2}\gamma^2\ \sin^2(\omega t) \end{pmatrix}$$

3. Pour la puissance de déformation, il est nécessaire de calculer la vitesse de déformation :

$$\dot{E}_{IJ} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \omega\gamma \ \cos(\omega t) & 0 \\ \omega\gamma \ \cos(\omega t) & 2\gamma^2\omega \ \sin(\omega t)\cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En exprimant la densité de la puissance de déformation $P_d := \int_{\mathcal{B}} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} \, dV$, on obtient :

$$p_d := \frac{dP_d}{dV} = \mu \ \gamma^2\omega \ \sin(\omega t)\cos(\omega t) + \left(\frac{\lambda}{2} + \mu\right) \ \gamma^4 \ \sin^3(\omega t) \ \cos(\omega t)$$

Le travail de interne déformation au cours du cycle est donné par :

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} p_d \ dt = \left[\frac{\mu}{2} \ \gamma^2 \ \sin^2(\omega t) + \frac{1}{4}\left(\frac{\lambda}{2} + \mu\right) \ \gamma^4 \ \sin^4(\omega t)\right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}} = 0 \geq 0$$

Par contre, nous constatons que le travail de déformation est toujours positif ou nul. Ceci est toujours vrai dans le cas où :

$$\mu \geq 0, \qquad \frac{\lambda}{2} + \mu \geq 0.$$

Ces deux inégalités traduisent aussi la positivité du tenseur d'élasticité $\mathbb{E}_{ijkl}$ du matériau.

4. De l'exercice précedent sur l'indifférence matérielle, on a montré que les tenseurs $\mathbf{C}^* = \mathbf{C}$, $\mathbf{E}^* = \mathbf{E}$ et par conséquent $\mathbf{S}^* = \mathbf{S}$ ne sont pas modifiés par un mouvement rigide supplémentaire. Pour calculer la contrainte de Cauchy σ, il suffit de calculer :

$$\sigma = \frac{1}{\mathrm{Det}\mathbf{F}} \ \mathbf{F} \ \mathbf{S} \ \mathbf{F}^{\mathrm{T}}$$

De même, l'exercice précedent nous a permi de montrer que :

$$\sigma^* = \mathbf{Q} \ \sigma \ \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}, \qquad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Fonctions d'élongation. On considère la transformation d'un milieu continu $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t)$ en très grandes déformations. Nous définissons les élongations scalaire de fibre ou de facette matérielles par :

$$\lambda := \lim_{d\mathbf{X} \to 0} \frac{\|d\mathbf{x}\|}{\|d\mathbf{X}\|}, \qquad \eta := \lim_{d\mathbf{S} \to 0} \frac{\|d\mathbf{s}\|}{\|d\mathbf{S}\|}$$

Dans la configuration initiale, on définit les vecteurs unitaires $\mathbf{M}$ et $\mathbf{N}$ par les relations $d\mathbf{X} = \mathbf{M}\ \|d\mathbf{X}\|$ et $d\mathbf{S} = \mathbf{N}\ \|d\mathbf{S}\|$. On définit également les vecteurs unitaires transformés $\mathbf{m}$ et $\mathbf{n}$ par $d\mathbf{x} = \mathbf{m}\ \|d\mathbf{x}\|$ et $d\mathbf{s} = \mathbf{n}\ \|d\mathbf{s}\|$.

1. Exprimer les fonctions d'élongations :

$$\lambda = \lambda(\mathbf{M}, \mathbf{C}), \qquad \eta = \eta(\mathbf{N}, \mathbf{C})$$

2. Montrer les relations cinématiques générales suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{\overline{d\mathbf{x}}} &= \mathbf{grad}\mathbf{v}\,(d\mathbf{x}) \\ \dot{\overline{d\mathbf{s}}} &= \mathrm{div}\mathbf{v}\ d\mathbf{s} - \mathbf{grad}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}\,(d\mathbf{s}) \\ \dot{\overline{dv}} &= \mathrm{div}\mathbf{v}\ dv \end{aligned}$$

3. A l'aide de ces relations cinématiques, montrer que :

$$\begin{aligned} \dot{\overline{\ln(\lambda)}} &= \mathbf{grad}\mathbf{v} : \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \\ \dot{\overline{\ln(\eta)}} &= \mathbf{grad}\mathbf{v} : (\mathbb{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \\ \dot{\overline{\ln(\mathrm{Det}\mathbf{F})}} &= \mathbf{grad}\mathbf{v} : \mathbb{I} \end{aligned}$$

   N.B. La dérivée $\dot{\overline{\ln(\lambda)}} = \dfrac{\dot{\lambda}}{\lambda}$ est appelée quelquefois taux de déformation vraie lors d'une expérimentation d'extension uniaxiale.

4. Considérer les deux transformations suivantes $\gamma \in \mathbb{R}_+$, respectivement extension uniaxiale et glissement simple, :

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \gamma\ x_1, \qquad \frac{dx_2}{dt} = -\frac{\gamma}{2}\ x_2, \qquad \frac{dx_3}{dt} = -\frac{\gamma}{2}\ x_3 \\ \frac{dx_1}{dt} &= \gamma\ x_2, \qquad \frac{dx_2}{dt} = 0, \qquad \frac{dx_3}{dt} = 0 \end{aligned}$$

   Considérons des fibres matérielles $\mathbf{M} = M_1\ \mathbf{e}_1 + M_2\ \mathbf{e}_2 + M_3\ \mathbf{e}_3$. Calculer $\dot{\overline{\ln(\lambda)}}$ dans ces deux cas. Comment se comportent respectivement ces quantités lorsque $t \to \infty$?

N.B. Le but de cet exercice est de comparer l'efficience de deux types de transformations finies (écoulement de glissement et écoulement d'extension) dans un processus de mélange de milieux continus immiscibles.

Solution. Nous définissons les élongations scalaire d'une fibre ou de changement d'aire d'une facette matérielles par :

$$\lambda := \lim_{d\mathbf{X}\to 0} \frac{\|d\mathbf{x}\|}{\|d\mathbf{X}\|}, \qquad \eta := \lim_{d\mathbf{S}\to 0} \frac{\|d\mathbf{s}\|}{\|d\mathbf{S}\|}$$

Par la suite, ces fonctions sont appelées *fonctions d'élongations.* Dans la configuration initiale, on définit les vecteurs unitaires $\mathbf{M}$ et $\mathbf{N}$ par les relations $d\mathbf{X} = \mathbf{M}\ \|d\mathbf{X}\|$ et $d\mathbf{S} = \mathbf{N}\ \|d\mathbf{S}\|$. On définit également les vecteurs unitaires transformés $\mathbf{m}$ et $\mathbf{n}$ par $d\mathbf{x} = \mathbf{m}\ \|d\mathbf{x}\|$ et $d\mathbf{s} = \mathbf{n}\ \|d\mathbf{s}\|$.

1. On peut exprimer les fonctions d'élongations en écrivant :

$$\lambda^2 = \lim_{d\mathbf{X}\to 0} \frac{\|d\mathbf{x}\|^2}{\|d\mathbf{X}\|^2} = \lim_{d\mathbf{X}\to 0} \frac{d\mathbf{X}\cdot\mathbf{C}\,(d\mathbf{X})}{d\mathbf{X}\cdot\mathbb{I}\,(d\mathbf{X})} = \lim_{d\mathbf{X}\to 0} \frac{d\mathbf{X}}{\|d\mathbf{X}\|}\cdot\mathbf{C}\left(\frac{d\mathbf{X}}{\|d\mathbf{X}\|}\right)$$

On en déduit :

$$\lambda = \sqrt{\mathbf{M}\cdot\mathbf{C}\,(\mathbf{M})}$$

Pour le changement d'aire d'une facette, on peut écrire de manière analogue en utilisant le théorème de Nanson :

$$\eta^2 = \lim_{d\mathbf{S}\to 0} \frac{\|d\mathbf{s}\|^2}{\|d\mathbf{S}\|^2} = \lim_{d\mathbf{S}\to 0} \mathrm{Det}\mathbf{C}\ \frac{d\mathbf{S}\cdot\mathbf{C}^{-1}\,(d\mathbf{S})}{d\mathbf{S}\cdot\mathbb{I}\,(d\mathbf{S})} = \lim_{d\mathbf{X}\to 0} \mathrm{Det}\mathbf{C}\frac{d\mathbf{S}}{\|d\mathbf{S}\|}\cdot\mathbf{C}^{-1}\left(\frac{d\mathbf{S}}{\|d\mathbf{S}\|}\right)$$

Ce qui nous donne :

$$\eta = \sqrt{\mathrm{Det}\mathbf{C}\ \mathbf{N}\cdot\mathbf{C}^{-1}\,(\mathbf{N})}$$

2. D'une manière générale, on peut écrire les relations pour une fibre matérielle :

$$\dot{\overline{d\mathbf{x}}} = \frac{d}{dt}\,(\mathbf{F}\ d\mathbf{X}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{X}}\right)d\mathbf{X} = \frac{\partial}{\partial\mathbf{X}}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)\ d\mathbf{X} = \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)\ \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{X}}d\mathbf{X}$$

On en déduit :

$$\dot{\overline{d\mathbf{x}}} = \mathbf{gradv}\,(d\mathbf{x})$$

Pour le changement de volume matériel, on peut écrire :

$$dv = \mathrm{Det}\mathbf{F}\ dV \qquad \Longrightarrow \qquad \dot{\overline{dv}} = \dot{\overline{\mathrm{Det}\mathbf{F}}}\ dV$$

On a déjà vu en cours la dérivée d'un déterminant suivant une direction :

$$\begin{aligned} \varphi\,(\mathbf{F}) &= \det\mathbf{F} \\ D\varphi\,(\mathbf{F})\left[\dot{\mathbf{F}}\right] &= \det\mathbf{F}\ \mathrm{Tr}\left(\mathbf{F}^{-1}\dot{\mathbf{F}}\right) \end{aligned}$$

en posant $\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{gradv}\ \mathbf{F}$. Ce qui nous donne :

$$\dot{\overline{dv}} = \dot{\overline{\mathrm{Det}\mathbf{F}}}\ dV = \mathrm{Det}\mathbf{F}\ \mathrm{div}\mathbf{v}\ dV = \mathrm{div}\mathbf{v}\ dv$$

Finalement, nous pouvons calculer la dérivée d'une facette matérielle en partant de la relation :

$$\dot{\overline{d\mathbf{s}}} = \dot{\overline{\mathrm{Det}\mathbf{F}\ \ \mathbf{F}^{-\mathrm{T}}}}\,(d\mathbf{S})$$

On trouve sans peine la relation cherchée sachant que $\dot{\overline{\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}}} = 0$:

$$\dot{\overline{d\mathbf{s}}} = \mathrm{div}\mathbf{v}\ d\mathbf{s} - \mathbf{grad}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}\,(d\mathbf{s})$$

3. De ces relations cinématiques générales, nous pouvons alors écrire :

$$\overline{\ln(\lambda)}^{\cdot} = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \frac{\overline{\sqrt{\mathbf{M}\cdot\mathbf{C}(\mathbf{M})}}^{\cdot}}{\sqrt{\mathbf{M}\cdot\mathbf{C}(\mathbf{M})}} = \frac{1}{2}\,\mathbf{M}\cdot\mathbf{C}(\mathbf{M}) = \mathbf{m}\cdot\mathbf{D}(\mathbf{m})$$

De manière analogue on a :

$$\overline{\ln(\mathrm{Det}\mathbf{F})}^{\cdot} = \mathbf{gradv} : \mathbb{I}$$

et finalement :

$$\overline{\ln(\eta)}^{\cdot} = \mathbf{gradv} : (\mathbb{I} - \mathbf{n}\otimes\mathbf{n})$$

4. Application pour ces deux transformations on a respectivement :
   (a) La première transformation d'extension devient :

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1 \exp(\gamma t) \\ x_2 &= X_2 \exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right) \\ x_3 &= X_3 \exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right) \end{aligned}$$

   Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= M_1^2 \exp(2\gamma t) + M_2^2 \exp(-\gamma t) + M_3^2 \exp(-\gamma t) \\ \overline{\ln(\lambda)}^{\cdot} &= \frac{\gamma}{2}\;\frac{2M_1^2\exp(3\gamma t) - M_2^2 - M_3^2}{M_1^2\exp(3\gamma t) + M_2^2 + M_3^2} \end{aligned}$$

   Lorsque $t \to \infty$, on a :

$$\overline{\ln(\lambda)}^{\cdot} \simeq \gamma$$

   (b) Pour la seconde transformation de glissement simple, tout calcul fait, on a d'abord la transformation :

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1 + X_2\,\gamma t \\ x_2 &= X_2 \\ x_3 &= X_3 \end{aligned}$$

   ensuite la dérivée de l'élongation :

$$\overline{\ln(\lambda)}^{\cdot} = \frac{\gamma M_2 (M_1 + M_2\gamma t)}{1 + M_2\gamma t\,(2M_1 + M_2\gamma t)}$$

   On remarque que lorsque t est très grand, la dérivée devient :

$$\overline{\ln(\lambda)}^{\cdot} \simeq \frac{1}{t}$$

N. B. On peut remarquer la relation $\overline{\ln(\lambda)}^{\cdot} = \mathbf{D} : \mathbf{m}\otimes\mathbf{m} \leq \|\mathbf{D}\|\cdot\|\mathbf{m}\|^2 = \|\mathbf{D}\|$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Ce qui montre que la fonction d'efficience de mélange :

$$e_\lambda := \frac{\overline{\ln(\lambda)}^{\cdot}}{\|\mathbf{D}\|} \leq 1$$

quelle que soit la transformation du milieu continu. Pour les deux exemples, on a respectivement $\lim_{t\to\infty} e_\lambda = \sqrt{\frac{2}{3}} \simeq 0.816$ et $\lim_{t\to\infty} e_\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0.707$.