L2 : Outils mathématiques 4
Feuille de TD $n°7$

1. Surfaces paramétrées

Exercice 1.1. Calculer le flux du champ de vecteurs $\vec{V}(x,y,z) = (x,y,-z)$ à travers la demi-sphère $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ z \geqslant 0. \end{cases}$

Exercice 1.2. Sans calcul, déterminer le flux du vecteur $\vec{i}$ à travers la surface limité par le plan $x+y+z=1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ et $z \geqslant 0$.

Exercice 1.3. Calculer le flux à travers la surface limité par l'ellipse d'équations $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ z=0. \end{cases}$

(avec $a>0$ et $b>0$)

1) du champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\vec{V}(x,y,z) = (1,2,3)$
2) du champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\vec{W}(x,y,z) = (z,y,x^2)$.

Exercice 1.4. Vérifier la formule de Stokes lorsque S est la demi-sphère supérieure centrée en 0 et de rayon 1 et C son bord, pour les champs de vecteurs

1) $\vec{V}(x,y,z) = (x,y,z)$
2) $\vec{W}(x,y,z) = (y,z,x)$.

Exercice 1.5. Calculer la circulation du champ de vecteurs $\vec{V}(x,y,z) = (y-z, z-x, x-y)$ le long de l'ellipse $\mathcal{E}$ (après avoir préciser le sens du parcours) d'équations $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+z=1 \end{cases}$

1. Directement. 2. En utilisant la formule de Stokes

Exercice 1.6. On considère l'intégrale $\int_C (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz$, où C est le cercle d'équations $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ Calculer cette intégrale en appliquant la formule de Stokes.
Retrouver le résultat à l'aide d'un calcul direct.

Exercice 1.7. Soit Σ la partie de la surface décrite par le paraboloïde $z = 9-x^2-y^2$ et $z \geqslant 0$.

1. Calculer le flux du champ vectoriel $\vec{F} = 3x\vec{i} + 3y\vec{j} + z\vec{k}$ à travers Σ.
2. On note L la trace de Σ sur le plan xOy (il s'agit d'un cercle dont on calculera l'équation). Vérifier le théorème de Stokes pour le champ vectoriel $\vec{F} = 3z\vec{i} + 4x\vec{j} + 2y\vec{k}$, i.e. l'égalité

$$\iint_\Sigma (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{n} \mathrm{d}\sigma = \oint_L \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l}.$$

Exercice 1.8. Calculer le flux de $\vec{V}$ à travers la surface S en utilisant la formule d'Ostrogradski :

1) $\vec{V}(x,y,z) = (x^2y, -x^2z, z^2y)$, S le bord du parallélépipède rectangle formé par les plans : $x=0$, $x=3$, $y=0$, $y=1$, $z=0$ et $z=1$.
2) $\vec{V}(x,y,z) = (xz, yz, -z^2)$, S l'éllipsoïde d'équation $x^2+y^2+4z^2=1$.

Exercice 1.9. Calculer le flux du champ de vecteurs $\vec{V}(x,y,z) = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ à travers la sphère $x^2+y^2+z^2=R^2$: 1) Directement 2) A l'aide le la formule d'Ostrogradski.

Exercice 1.10. On considère la boite cylindrique S composée du cylindre d'équation $x^2+y^2=a^2$, $0 \leqslant z \leqslant b$ ($a>0$ et $b>0$) et des deux disques de rayon a aux niveaux $z=0$ et $z=b$.
On définit le champ de vecteurs $\vec{v}$ dans $\mathbb{R}^3$ par $\vec{v}(x,y,z) = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$.

1. Calculer directement le flux de $\vec{v}$ à travers S.
2. Calculer le flux de $\vec{v}$ à travers S en utilisant la formule d'Ostrogradski.