Université de Rennes

2023–2024

L2 : Outils mathématiques 4
Feuille de TD n°6

1. Intégrales curvilignes

Exercice 1.2. Calculer la longueur de chacun des arcs de courbes suivant :

1) $x = y^2$ avec $0 \leqslant y \leqslant 1$;
2) $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ avec $0 \leqslant t \leqslant t_0$;
3) La cardioide d'équation polaire $\rho = a(1+\cos\theta)$ avec $a > 0$ et $0 \leqslant \rho \leqslant a$
4) L'astroïde de paramétrage $\begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$
5) Une arche de cycloïde de paramétrage $\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]\,.$

Exercice 1.3. La chaînette est la courbe décrite par un fil pesant, homogène, tenu à ses deux extrémités. Dans un repère approprié, elle admet pour équation $y = \cosh(x)$. Déterminer la longueur d'un arc de chaînette

Exercice 1.4. Calculer l'intégrale curviligne $\displaystyle\int_{C^+} (x+y)\,dx + (x-y)\,dy$

où C^+ est le cercle unité orienté dans le sens direct (sens inverse des aiguilles d ?une montre).

Exercice 1.5. Calculer l'intégrale curviligne $\displaystyle\int_{C^+} xy\,dx + (x+y)\,dy$

Exercice 1.6.

1. Calculer le travail du champ de vecteurs $\vec{V}(x,y) = (y^2, x^2)$ sur la demi ellipse $x^2 + 4y^2 - 4 = 0; y \geqslant 0$ parcourue une fois dans le sens direct.
2. Calculer le travail du champ de vecteurs $\vec{V}(x,y) = (\cos(x), \sin(y))$ sur le cercle unité parcouru deux fois dans le sens des aiguilles d'une montre.
3. Calculer le travail du champ de vecteurs $\vec{V}(x,y) = (x^2+y^2, x^2-y^2)$ sur le triangle OAB avec $A = (1,0)$, $B = (0,1)$ parcouru une fois dans le sens direct.

Exercice 1.7. Calculer l'intégrale curviligne $\displaystyle\int_\gamma \frac{y+z}{x^2+y^2}\,dx + \frac{z+x}{x^2+y^2}\,dy + \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dz$ lorsque :

1) γ est le segment de droite d'origine $A = (1,1,1)$ et d'extrémité $B = (2,2,2)$.
2) γ est l'hélice définie par $x = \cos t$, $y = \sin t$ et $z = t$, t variant de 0 à 2π.

Exercice 1.8. Calculer l'intégrale curviligne $\displaystyle\int_\Gamma y^2\,dx - x^2\,dy$ lorsque :

1) Γ est le segment de droite d'origine $A = (1,0)$ et d'extrémité $B = (0,1)$.
2) Γ est l'arc de cercle de centre $(0,0)$, de rayon 1 d'origine $A = (1,0)$ et d'extrémité $B = (0,1)$.

Exercice 1.9. Montrer que l'intégrale curviligne $\int_\Gamma xy^2\,dx + x^2y\,dy$ est nulle lorsque Γ est un arc simple fermé (sans calcul de primitive). Calculer cette intégrale lorsque $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ où $\Gamma_1 = AB$ est l'arc de parabole d'équation $y^2 = 4 - 3x$ limité en A par la droite d'équation $y = x$ et en B par l'axe des $x \geqslant 0$, Γ_2 est le segment de droite allant de B à O et Γ_3 est le segment de droite allant de O à A.
Calculer une primitive de $xy^2\,dx + x^2y\,dy$. Retrouver $\int_{\Gamma_i} xy^2\,dx + x^2y\,dy$ pour $i \in \{1,2,3\}$.

Exercice 1.10. Déterminer une fonction u, dont on précisera le domaine de définition, telle que :

$$du = \frac{x+2y}{(x+y)^2}\,dx + \frac{y}{(x+y)^2}\,dy$$

Exercice 1.11. Calculer le travail effectué par la force $\overrightarrow{F} = (y+z)\,\overrightarrow{i} + (x+z)\,\overrightarrow{j} + (x+y)\,\overrightarrow{k}$ pour déplacer une particule de l'origine O au point $C = (1,1,1)$:

1. le long de la droite (OC).
2. le long de la courbe $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$.

Même question pour la force $\overrightarrow{G} = (x+yz)\overrightarrow{i} + (y+xz)\overrightarrow{j} + (z+xy)\overrightarrow{k}$.

Exercice 1.12. Soit $\mathcal{D}$ le domaine limité par le cercle d'équation $x^2+y^2-2y=0$ parcouru dans le sens direct. Calculer à l'aide de la formule de Green-Riemann $\iint_{\mathcal{D}} (x^2-y^2)dxdy$.

Exercice 1.13. Calculer l'intégrale curviligne I le long de la courbe fermée γ constituée par les deux arcs de parabole $y=x^2$ et $x=y^2$, orientée dans le sens direct où $I = \displaystyle\int_\gamma (2xy-x^2)dx + (x+y^2)dy$. Vérifier le résultat en utilisant la formule de Green-Riemann.

Exercices supplémentaires :

Exercice 1.14. Calculer la longueur de la boucle de la courbe de paramétrage $\begin{cases} x(t) = 3t^2-1 \\ y(t) = 3t^3-t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Exercice 1.15. Soit $\omega = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ avec :

$$P(x,y) = \frac{(3x^2-y^2)(x^2+y^2)}{x^2y} \qquad \text{et} \qquad Q(x,y) = \frac{(3y^2-x^2)(x^2+y^2)}{xy^2}.$$

1) Montrer que, dans le domaine $D = \{(x,y); x>0,\ y>0\}$, ω est une forme différentielle totale.
2) Déterminer u dans D, telle que $du = \omega$.
3) Calculer l'intégrale curviligne $\int_\Gamma \omega$ lorsque Γ est l'arc défini par : $x = t + \cos^2 t$, $y = 1+\sin^2 t$ avec $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Exercice 1.16. Le *follium de Descartes* est une courbe définie, en coordonnées cartésiennes, par l'équation $x^3+y^3-3axy=0$.

1. Montrer que l'équation de la courbe en coordonnées polaires est $r = 3a\dfrac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{\cos^3(\theta)+\sin^3(\theta)}$.
2. En posant $y = tx$, montrer que la courbe peut aussi être paramétrée, en coordonnées cartésiennes, par $x = 3a\dfrac{t}{1+t^3}$, $y = 3a\dfrac{t^2}{1+t^3}$.
3. Utiliser cette dernière paramétrisation pour calculer, à l'aide de la formule de Green-Riemann, l'aire de la surface délimitée par la boucle du follium.

Exercice 1.17. *Aire en coordonnées polaires.* Soit D le domaine limité par $r = p(\theta)$ avec $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$; et le segment $\begin{cases} \theta = 0 \\ p(0) \leqslant r \leqslant p(2\pi). \end{cases}$ Montrer que l'aire de D est égale à $\mathcal{A}(D) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi} p^2(\theta)\,d\theta$.
Trouver l'aire : **a**) de la cardioïde : $r = a(1+\cos(\theta))$, **b**) de l'escargot : $r = a\theta$, $(a>0)$.
Dessiner les lignes de coordonnées $r = \mathcal{C}^{te}$ et $\phi = \mathcal{C}^{te}$ dans le plan des x, y.
Dessiner les lignes de coordonnées $x = \mathcal{C}^{te}$ et $y = \mathcal{C}^{te}$ dans le plan des r, ϕ.