Université
de Rennes

2023–2024

L2 : Outils mathématiques 4
Feuille de TD $n°$5

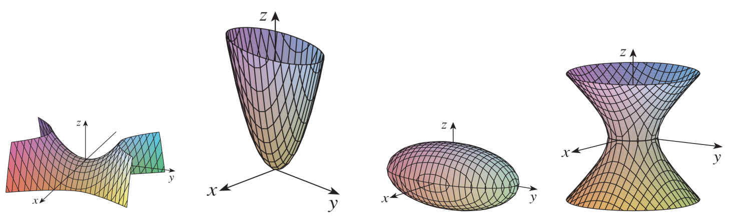
Exercice 1. Une plaque d'un matériau a la forme d'une surface délimitée par la parabole $x = y^2$ et la droite $x = 4$. La densité de masse par unité de surface, ρ, est proportionnelle à la distance du point de l'axe Oy. Déterminer les coordonnées du barycentre de la plaque.

Exercice 2. On considère trois figures planes dans le plan Oxz :
–Un rectangle R dont les sommets ont comme coordonnées $(0, 0), (a, 0), (a,\ h)$ et $(0,\ h)$.
–Un triangle T dont les sommets ont comme coordonnées $(0, 0), (a, 0)$ et $(0,\ h)$.
–Un demi-cercle C de centre $(0, 0)$, de rayon a et situé dans le demi-plan $x \geqslant 0$.
Pour chacune de ces 3 figures, calculer : (a) l'aire S, (b) l'abscisse c de son centre de gravité, (c) le volume V du solide obtenu par révolution de la figure autour de l'axe Oz.
Comparer $2\pi cS$ et V pour ces figures ? Pouvez-vous formuler rigoureusement votre conclusion et la démontrer en toute généralité ?

Exercice 3. Déterminer le centre de gravité de la surface située à l'extérieur du cercle de rayon 1 et délimitée par la cardioïde $\rho = 1 + \cos\theta$.

Exercice 4. Soit D le domaine $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ /\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ x + 2y + z \leqslant 1\}$. Représenter graphiquement D. Calculer ensuite de deux manières différentes l'intégrale triple $\displaystyle\iiint_D x\,dx\,dy\,dz$
(a) en intégrant "par piles", (b) en intégrant "par tranches".

Exercice 5. Associer à chaque équation son graphe :
a) $x^2 + \dfrac{y^2}{9} + z^2 = 1$ *b)* $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ *c)* $z = -x^2 + y^2$ *d)* $z = x^2 + \dfrac{y^2}{4}$



1) 2) 3) 4)

Exercice 6. Calculer l'intégrale triple : $\displaystyle\iiint_B \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dx\,dy\,dz$ où B est la boule de centre $(0, 0, 0)$ et de rayon 1.

Exercice 7. Représenter graphiquement et calculer le volume limité par les surfaces de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = 2x^2 + y^2$ et $z = 4 - y^2$.

Exercice 8. Calculer le volume de l'ellipsoïde d'équation : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.
Quelles sont les coordonnées de son barycentre, sous l'hypothèse que le matériau de construction est homogène ?

Exercice 9. Un solide a la forme d'un cylindre de base de rayon R et de hauteur h. La densité volumique ρ du matériau varie avec la hauteur ; elle est proportionnelle à la distance du point à la base du cylindre. Calculer le moment d'inertie du solide autour de son axe de révolution.

Exercice 10. Transformer l'intégrale suivante en coordonnées cylindriques puis en coordonnées sphériques :

$$\int_0^3 \left(\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{0} \left(\int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} yz^2 dz \right) dy \right) dx$$

Exercice 11. Calculer l'intégrale triple : $\iiint_V z\,dx\,dy\,dz$ où V est le domaine limité par le demi-ellipsoïde supérieur $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ et par le plan d'équation $z=0$.

Exercice 12. Déterminer le volume V de la partie de la boule $x^2+y^2+z^2\leqslant 4$ contenue dans le cylindre $(y-1)^2+x^2=1$.

Exercice 13. Calculer l'intégrale triple : $\iiint_V z\,dx\,dy\,dz$ où V est le domaine limité par le cône d'équation $z^2=\frac{h^2}{R^2}(x^2+y^2)$ et le plan $z=h$.

Exercice 14. Déterminer le volume du domaine Ω de $\mathbb{R}^3$ sous la sphère $x^2+y^2+z^2=4$ et au-dessus du cône $z^2=3(x^2+y^2)$, $(z\geqslant 0)$.

Exercice 15. Calculer l'intégrale triple : $\iiint_V dx\,dy\,dz$ où V est le domaine limité par la surface d'équations $x^2+y^2+z^2=2Rz$ et $x^2+y^2=z^2$ et contenant le point $(0,0,R)$.