Exercice 7

Soit D le quart de disque unité défini par : $D = \{(x,y) | \quad 0 \leqslant x,\ 0 \leqslant y,\ x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.
Calculer $I = \iint_D (4 - x^2 - y^2)\ dxdy$.

Exercice 8

Calculer $I = \iint_D (x+y)^2\, dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leqslant y \leqslant x^2 + y^2 \leqslant x\}$.

Exercice 9

Soit D le domaine délimité par les droites $y = x$, $y = x + 2$, $y = -x$ et $y = -x + 2$.

1- Calculer l'intégrale $I = \iint_D (x-y)^2 dxdy$

2- Calculer I en utilisant le changement de variables $u = x + y$ et $v = x - y$.

Exercice 10

La droite d'équation $y = x$ délimite dans les carré $[0,1] \times [0,1]$ deux triangles égaux T_1 et T_2. En utilisant le changement de variable $u = y,\ v = x$, montrer que $\iint_{T_1} xy\ dxdy = \iint_{T_2} xy\ dxdy$.
Donner un exemple d'une fonction continue $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que
$\iint_{T_1} f(x,y)\ dxdy \neq \iint_{T_2} f(x,y)\ dxdy$.

Exercice 11

Calculer $I = \iint_D e^{\frac{y}{x+y}}\ dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + y \leqslant 1\}$, à l'aide du changement de variables $\left\{ \begin{array}{l} x + y = u \\ y = uv \end{array} \right.$

Exercice 12

Soit $a > 0$ et $I_a = \iint_{T_a} \sqrt{xy}\, e^{-x-y}\ dxdy$ où $T_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + y \leqslant a\}$ et $a > 0$.
Calculer I à l'aide du changement de variables $\left\{ \begin{array}{l} x = tu \\ y = (1-t)u \end{array} \right.$

Exercice 13

Le but de cet exercice est de calculer l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$, définie comme $\lim_{n \longrightarrow +\infty} I_n$,
où $I_n = \int_0^n e^{-x^2} dx$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, considérons le quart de disque
$D_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 \leqslant n^2, x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$ et le carré $C_n = [0,n] \times [0,n]$.

1. Calculer les intégrales $J_n = \iint_{D_n} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$ et $J_{2n} = \iint_{D_{2n}} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$ en utilisant le changement de variables en coordonnées polaires.
2. Considérons l'intégrale $K_n = \iint_{C_n} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$. Montrer que $K_n = I_n^2$.
3. En utilisant un dessin (représentant $D_n,\ C_n$ et D_{2n}) expliquer pourquoi $J_n \leqslant K_n \leqslant J_{2n}$.
4. Quelle est la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de J_n et de J_{2n} ? et de K_n ? En déduire la valeur de I.

Exercice 1. Une plaque d'un matériau a la forme d'une surface délimitée par la parabole $x = y^2$ et la droite $x = 4$. La densité de masse par unité de surface, ρ, est proportionnelle à la distance du point de l'axe Oy. Déterminer les coordonnées du barycentre de la plaque.

Exercice 2. On considère trois figures planes dans le plan Oxz :
–Un rectangle R dont les sommets ont comme coordonnées $(0,0), (a,0), (a,\ h)$ et $(0,\ h)$.
–Un triangle T dont les sommets ont comme coordonnées $(0,0), (a,0)$ et $(0,\ h)$.
–Un demi-cercle C de centre $(0,0)$, de rayon a et situé dans le demi-plan $x \geqslant 0$.
Pour chacune de ces 3 figures, calculer : (a) l'aire S, (b) l'abscisse c de son centre de gravité, (c) le volume V du solide obtenu par révolution de la figure autour de l'axe Oz.
Comparer $2\pi cS$ et V pour ces figures ? Pouvez-vous formuler rigoureusement votre conclusion et la démontrer en toute généralité ?

Exercice 3. Déterminer le centre de gravité de la surface située à l'extérieur du cercle de rayon 1 et délimitée par la cardioïde $\rho = 1 + \cos\theta$.