0.1 Extrema liés

Exercice 12

Soit $\mathcal{E}$ l'ellipse dans $\mathbb{R}^2$ définie par l'équation $\dfrac{x^2}{3} + y^2 = 1$.

1. Déterminer les points critiques de $g(x, y) = \frac{x^2}{3} + y^2$ situés sur $\mathcal{E}$.
2. On considère les fonctions

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= y \\ f_2(x, y) &= x + y \\ f_3(x, y) &= x^2 + y^2 . \end{aligned}$$

   Déterminer (et dessiner) les extrema locaux des fontions f_j restreintes à $\mathcal{E}$.

Exercice 13

La température sur la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ est donnée par $T(x,\ y,\ z) = 2 + xz + y^2$.
Trouver les points les plus chauds et ceux les plus froids.

Exercice 14

Cet exercice a pour but de démontrer l'inégalité arithmético-géométrique :
$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leqslant \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$ pour des nombres $a_i \geqslant 0$.

Utiliser la méthode de Lagrange pour trouver la valeur maximale de $f(x_1,\ \ldots,\ x_n) = x_1^2 \cdots x_n^2$ sur la sphère de rayon $r > 0$: $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = r^2$. Pourquoi f admet-elle une valeur maximale ?

Déduire de la question précédente que $x_1^2 \cdots x_n^2 \leqslant (\dfrac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n})^n$

En déduire l'inégalité arithmético-géométrique.

Exercice 15

Trouver la valeur maximale de $f(x,\ y,\ z) = x + z$ sur la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (par la méthode de Lagrange).

Exercice 16

Trouver le minimum de la fonction $\displaystyle\sum_{i=1}^{d} x_i$ pour $x \in \mathbb{R}_+^d$ avec $\displaystyle\prod_{i=1}^{d} x_i = 1$.

Exercice 17

Déterminer le maximum du produit des distances d'un point M d'un triangle ABC aux trois côtés du triangle.

Exercice 18

Déterminer les extrema de la fonction f définie par $f(x,\ y,\ z) = xy + yz + zx$, sachant que $x + y + z = 1$.

Exercice 19

Soit $g(x, y, z) = xyz - 32$, $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ ;\ g(x, y, z) = 0\}$ et $f(x, y, z) = xy + 2yz + 2xz$. Déterminer $\min\{f(x, y, z)\ ; (x, y, z) \in \mathcal{S}\}$.

Exercice 20

Déterminer le point p du plan $\Sigma = \{(x, y, x + y)\ ;\ x, y \in \mathbb{R}\}$ qui réalise la distance $\operatorname{dist}(\Sigma\ ,\ (1, 0, 0))$.

Exercice 21

1. Déterminer les extrema de la fonction $f(x, y) = xy$ sur le cercle unité $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ ; x^2 + y^2 = 1\}$.
2. Même question pour la fonction $f(x, y) = xy^2$.

Exercice 22

Déterminer le minimum et le maximum de la fonction $f(x, y, z) = 5x + y - 3z$ sur l'intersection du plan $\Sigma = \{x + y + z = 0\}$ avec la sphère unité de $\mathbb{R}^3$.