
L2 : Outils mathématiques 4

Feuille de TD n°1

Exercice 1

Déterminer les extrema sur \mathbb{R} de la fonction $x \mapsto \frac{4x}{2+x^2}$.

Exercice 2

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que la limite de f en $+\infty$ existe et vaut $f(0)$. Montrer que f atteint au moins un de ses extrema globaux.

Exercice 3

Soient x et y deux nombres réels strictement positifs dont le produit est constant. Déterminer si leur somme passe par un extremum.

Soient x et y deux nombres réels positifs dont la somme est constante. Déterminer si leur produit passe par un extremum.

Exercice 4

Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes :

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

$$f(x, y) = xy + \ln(1+y).$$

$$f(x, y) = (x-y)^2 + (x+y)^3.$$

$$f(x, y) = ae^{-x} + be^{-y} + ce^{x+y} \text{ avec } a, b, c > 0.$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{a}{xy} \text{ pour } x > 0, y > 0 \text{ et } a > 0. \text{ Montrer que le minimum est global.}$$

Exercice 5

Montrer que les fonctions suivantes n'admettent pas d'extremum local en $(0, 0)$:

1) $(x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 4(x-y)^2$,

2) $(x, y) \mapsto x(x^2 + y^2 - 2x)$.

Exercice 6

Déterminer les extrema (locaux et globaux) des fonctions suivantes définies sur \mathbb{R}^2 :

1. $f(x, y) = x^2 - y^2$.

2. $f(x, y) = x^3 - y^3$.

3. $f_\alpha(x, y) = x^3 + y^3 - \alpha xy$, ($\alpha \in \mathbb{R}$)

4. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy + 1$.

Exercice 7

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + y^2 + \cos(x^2 + y^2)$.

1. Montrer que f est de classe C^2 .

2. Déterminer les points critiques de f .

3. Montrer que f a un minimum absolu en $(0, 0)$.

Exercice 8

Montrer que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \cos(x^2 + y^4)$ a un maximum local strict en $(0, 0)$.

Exercice 9

Déterminer tous les extrema locaux et globaux ainsi que les points de selle de la fonction $f(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2)$ sur le carré $\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

Exercice 10

Déterminer la borne supérieure de la fonction $(x, y) \mapsto 3xy - 3x^2 - y^3$ sur le carré $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

Exercice 11

Considérer la fonction $f(x, y) = x^3 - 3x^2 + y^2$.

1. Déterminer les points critiques de f ainsi que leur nature.

2. Trouver les extrema de f sur le carré $[-2, 2] \times [-2, 2]$.