Chapter 6

Intégrales triples

L'intégrale d'une fonction de 3 variables $f : \Omega \to \mathbb{R}$ sur un domaine régulier Ω de $\mathbb{R}^3$ se définit selon les mêmes principes que l'intégrale double: par découpage et échantillonnage .

Pour tout entier $n \geq 1$, l'espace se décompose en cubes de côté $\dfrac{1}{n}$:

$$\begin{aligned} C_{k,l,m} &= \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 |\ \frac{k}{n} \leq x < \frac{k+1}{n},\ \frac{l}{n} \leq y < \frac{l+1}{n},\ \frac{m}{n} \leq z < \frac{m+1}{n},\ (k,l,m) \in \mathbb{Z}^3\} \\ &= \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right] \times \left[\frac{l}{n}, \frac{l+1}{n}\right] \times \left[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}\right] \end{aligned}$$

Chaque petit cube $C_{k,l,m}$ est de côté $\dfrac{1}{n}$ et donc de volume $\dfrac{1}{n^3}$.

Sur chaque cube $C_{k,l,m}$, contenu dans Ω, on évalue f en un point de $C_{k,l,m}$, par exemple

$$M_{k,l,m} = (\frac{k}{n},\ \frac{l}{n},\ \frac{m}{n}).$$

On associe à f et n la somme de Riemann

$$S_n(f) = \sum_{C_{k,l,m} \subset\ \Omega} f(M_{k,l,m})\ \mathrm{Vol}(C_{k,l,m}) = \frac{1}{n^3} \sum_{C_{k,l,m} \subset\ \Omega} f(\frac{k}{n},\ \frac{l}{n},\ \frac{m}{n})\ .$$

On a de nouveau un résultat de convergence de ces approximations lorsque n tend vers $+\infty$.

6.0.1 THÉORÈME
Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur le domaine régulier Ω de $\mathbb{R}^3$. La suite des sommes de Riemann $S_n(f)$ converge vers un nombre réel limite lorsque n tend vers $+\infty$.

6.0.2 DÉFINITION (DÉFINITION DE L'INTÉGRALE TRIPLE)
On appelle intégrale triple de f sur Ω cette limite, et on la note $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz$.

Propriétés élémentaires de l'intégrale triple

On passe en revue les propriétés les plus simples de l'intégrale triple. Pour toutes fonctions continues f et g, pour tous réels λ et μ, on a:

1) **linéarité:** *Pour tout* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, *on* a
$$\iiint_\Omega (\lambda f + \mu g) dxdydz = \lambda \iiint_\Omega f dxdydz + \mu \iiint_\Omega g dxdydz.$$

2) **additivité par découpage:** Si $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ et $\Omega_1 \cap \Omega_2$ est de volume nul, *alors*
$$\iiint_\Omega f dxdydz = \iiint_{\Omega_1} f dxdydz + \iiint_{\Omega_2} f dxdydz.$$

3) **positivité, croissance:** Si $f(x,\ y,z) \leq g(x,\ y,z)$ *pour tout* $(x,\ y,z) \in \Omega$, *alors*
$$\iiint_\Omega f(x,\ y,z) dxdydz \leq \iiint_\Omega g(x,\ y,z) dxdydz.$$
En particulier, si $f \geq 0$ alors $\iiint_\Omega f(x,\ y,z) dxdydz \geq 0.$

4) **positivité par rapport au domaine:** Si $\Omega_1 \subset \Omega_2$ et $f \geq 0$ alors
$$\iiint_{\Omega_1} f(x,\ y,z) dxdydz \leq \iiint_{\Omega_2} f(x,\ y,z) dxdydz.$$

5) **Calcul de volume**

Le volume de Ω est l'intégrale triple sur Ω de la fonction constante égale à 1 :
$$\boxed{\text{Volume de } \Omega = \iiint_\Omega dxdydz}$$

6.0.1 Calcul d'intégrales triples à l'aide d'intégrales doubles et simples

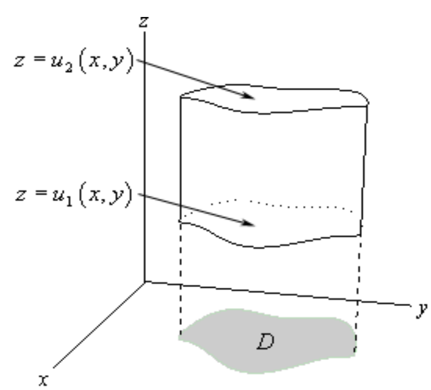
6.0.3 THÉORÈME (THÉORÈME DE FUBINI SUR UN PARALLÉLÉPIPÈDE)
Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ un domaine bornée (à bord régulier) de l'espace et $f(x,y,z)$ une fonction continue sur Ω. si $\Omega = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ (un parallélépipède) alors
$$\iiint_\Omega f(x,y,z) dxdydz = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z) dz \right) dy \right) dx = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z) dz \right) dx \right) dy$$
$$= \int_{a_3}^{b_3} \left(\int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x,y,z) dy \right) dx \right) dz = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_3}^{b_3} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x,y,z) dy \right) dz \right) dx$$
$$= \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_3}^{b_3} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x,y,z) dx \right) dz \right) dy = \int_{a_3}^{b_3} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x,y,z) dx \right) dy \right) dz.$$

6.0.4 THÉORÈME (THÉORÈME DE FUBINI EN PILES(VERTICALES))
Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur Ω, un domaine bornée (à bord régulier) de l'espace décrit en "pile" au dessus d'un domaine régulier $D \subset \mathbb{R}^2$:

$$\Omega = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D \text{ et } u_1(x,y) \leq z \leq u_2(x,y) \right\}$$

où D est un domaine du plan, u_1 et u_2 sont des fonctions continues sur D. Alors

$$\boxed{\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iint_D \left(\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy}$$



6.0.5 REMARQUE
D est la projection orthogonale de Ω sur le plan xOy.

6.0.6 THÉORÈME (THÉORÈME DE FUBINI EN TRANCHES OU COUCHES (HORIZONTALES))
Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur Ω, un domaine bornée (à bord régulier) de l'espace décrit en "tranche"

$$\Omega = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z_1 \leq z \leq z_2 \text{ et } (x,y) \in D_z \right\}$$

où pour tout z, la tranche $D_z = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x,y,z) \in \Omega \right\}$ (l'intersection de Ω avec le plan de hauteur z parallèle à $x0y$) est un domaine régulier du plan.

Alors

$$\boxed{\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \int_{z_1}^{z_2} \left(\iint_{D_z} f(x,y,z)dxdy \right) dz}$$

Application au calcul de volume: Lorsque $f = 1$, on sait que $\iint_\Omega dxdydz$=Volume(Ω)
.

Les énoncés précédents donnent donc deux méthodes de calculs des volumes.

6.0.7 COROLLAIRE
1) Volume en piles,

$$\text{Volume }(\Omega) = \iint_D (u_2(x,\,y) - u_1(x,\,y))dxdy.$$

2) Volume en tranches,

$$\text{Volume }(\Omega) = \int_a^b \left(\iint_{D_z} dxdy \right) dz = \int_a^b \text{Aire }(D_z)dz.$$

Exemples de calcul d'intégrales triples

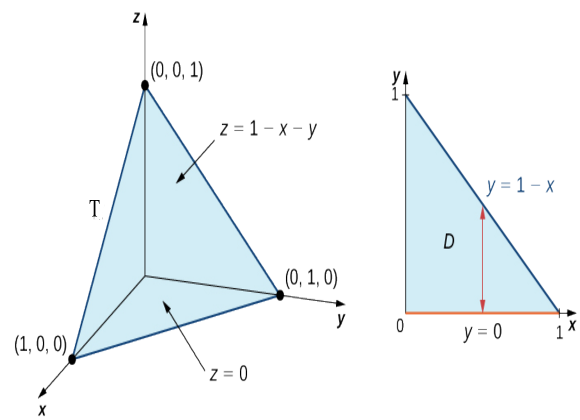
6.0.8 EXEMPLE. Soit le parallélépipède $V = [0,1] \times [1,2] \times [2,3]$, alors

$$\begin{aligned}
\iiint_V (x^2 - 2yz)dxdydz &= \int_2^3 \left(\int_1^2 \left(\int_0^1 (x^2 - 2yz)\, dx \right) dy \right) dz \\
&= \int_2^3 \left(\int_1^2 [\frac{1}{3}x^3 - 2xyz]_{x=0}^{x=1}\, dy \right) dz \\
&= \int_2^3 \left(\int_1^2 (\frac{1}{3} - 2yz))dy \right) dz \;=\; \int_2^3 [\frac{1}{3}y - y^2z]_{y=1}^{y=2}\, dz \\
&= \int_2^3 (\frac{2}{3} - 4z - \frac{1}{3} + z)dz \;=\; \int_2^3 \left(\frac{1}{3} - 3z \right)\, dz \\
&= [\frac{1}{3}z - \frac{3}{2}z^2]_{z=2}^{z=3} \;=\; \frac{3}{3} - \frac{27}{2} - \frac{2}{3} + \frac{12}{2} \\
&= \frac{1}{3} - \frac{15}{2} \;=\; \boxed{-\frac{43}{6}}
\end{aligned}$$

6.0.9 EXEMPLE. Calculer $I = \iiint_C zdxdydz$ sur le cube $C = [0,1]^3$. Ici le domaine est en pile de hauteur constante au dessus du carré $D = [0,\,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$. D'après le théorème de Fubini, on a

$$I = \iint_D (\int_0^1 zdz)dxdy = \iint_D \frac{1}{2}dxdy = \frac{1}{2}\text{ Aire }(D) = \frac{1}{2}.$$

6.0.10 EXEMPLE (CALCUL DU VOLUME DU TÉTRAÈDRE STANDARD). Calculer le volume de $T = \{(x,\,y,\,z) \in \mathbb{R}^3, |\; x \geq 0,\; y \geq 0,\; z \geq 0,\; x + y + z \leq 1\}$. T est un tétraèdre plein de base le triangle $\Delta = \{(x,\,y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0,\; y \geq 0,\; x + y \leq 1\}$ et de sommet $(0,0,1)$
.



1) Si on procède en piles, pour tout z on a $u_1(x,\ y) = 0 \leq z \leq 1 - x - y = u_2(x,\ y)$ sur T alors
Volume $(T) = \iint_\Delta (1-x-y)dxdy = \int_0^1 (\int_0^{1-x}(1-x-y)dy)dx = \int_0^1 ((1-x)^2 - \frac{(1-x)^2}{2})dx =$
$\left[-\frac{(1-x)^3}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ Aire(base) $\times$hauteur.

2) Si on procède par couches (ou tranches), on constate que $0 \leq z \leq 1$ et pour tout z, la tranche est le triangle $\Delta_z = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 |\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1 - z\}$

$$\text{Volume}(T) = \int_0^1 \text{Aire}(\Delta_z)dz = \int_0^1 \frac{(1-z)^2}{2}dz = \left[-\frac{(1-z)^3}{6}\right]_{z=0}^{z=1} = \frac{1}{6}.$$

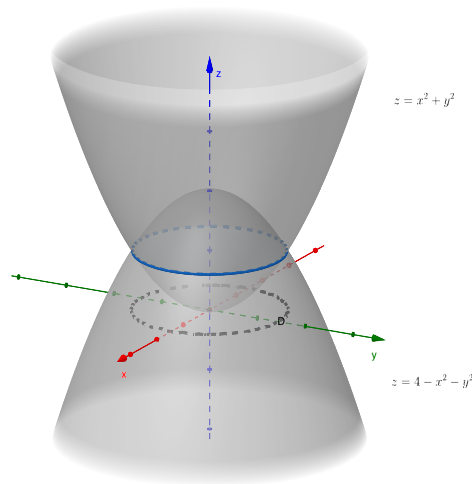
6.0.11 Exemple (Calcul du volume d'une boule de rayon R). .
On considère la boule $B_R = \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$. Pour z donné dans $[-R,\ R]$, la tranche de hauteur z de B_R est

$$D_z = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 \leq R^2 - z^2\},$$

c'est-à-dire le disque de centre $(0,0)$ de rayon $r = \sqrt{R^2 - z^2}$, dont l'aire (calculable par changement de variables en coordonnées polaires) vaut πr^2. On a donc, par le théorème de Fubini (en tranches)

$$\text{Volume } (B_R) = \int_{-R}^{R} \text{Aire } (D_z)dz = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - z^2)dz = \pi(2R^3 - \frac{2R^3}{3}) = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

6.0.12 Exemple. On se propose de calculer le volume du domaine borné Ω, déterminé par les paraboloïdes d'équations $z = x^2 + y^2$ et $z = 4 - x^2 - y^2$. On aura $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq z \leq 4 - (x^2 + y^2)\}$. La projection D de Ω sur le plan xOy est donnée par l'inégalité $x^2 + y^2 \leq 4 - (x^2 + y^2)$ i.e. $x^2 + y^2 < 2$, d'où D est le disque centré en $(0,0)$ et de rayon $\sqrt{2}$.



Pour (x, y) fixé dans D, la valeur minimale est $z = x^2 + y^2$ et la valeur maximale est $z = 4 - x^2 - y^2$ pour z. Alors

$$\mathrm{Vol}(\Omega) = \iiint_\Omega dxdydz = \iint_D \left(\int_{x^2+y^2}^{4-(x^2+y^2)} dz \right) dxdy = \iint_D \left(4 - (x^2+y^2) - (x^2+y^2)\right) dxdy$$
$$= \iint_D \left(4 - 2(x^2+y^2)\right) dxdy.$$

Le calcul de cette intégrale double est plus facile en coordonnées polaires. On aura

$$\mathrm{Vol}(\Omega) = \iint_D \left(4 - 2(x^2+y^2)\right) dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} (4-2r^2) r dr d\theta = [\theta]_0^{2\pi} \times \left[2r^2 - 2\frac{r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{2}} = 4\pi.$$