Chapter 6

Intégrales triples

L'intégrale d'une fonction de 3 variables $f : \Omega \to \mathbb{R}$ sur un domaine borné et régulier Ω de $\mathbb{R}^3$ se définit selon les mêmes principes que l'intégrale double: par découpage et échantillonnage .

Pour tout entier $n \geq 1$, l'espace se décompose en cubes de côté $\frac{1}{n}$:

$$C_{k,l,m} = \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 |\, \frac{k}{n} \leq x < \frac{k+1}{n},\, \frac{l}{n} \leq y < \frac{l+1}{n},\, \frac{m}{n} \leq z < \frac{m+1}{n},\ (k,l,m) \in \mathbb{Z}^3\}$$

$$= \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right] \times \left[\frac{l}{n}, \frac{l+1}{n}\right] \times \left[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}\right]$$

Chaque petit cube $C_{k,l,m}$ est de côté $\frac{1}{n}$ et donc de volume $\frac{1}{n^3}$.

Sur chaque cube $C_{k,l,m}$, contenu dans Ω, on évalue f en un point de $C_{k,l,m}$, par exemple

$$M_{k,l,m} = (\frac{k}{n},\, \frac{l}{n},\, \frac{m}{n}).$$

On associe à f et n la somme de Riemann

$$S_n(f) = \sum_{C_{k,l,m} \subset\, \Omega} f(M_{k,l,m})\ \mathrm{Vol}(C_{k,l,m}) = \frac{1}{n^3} \sum_{C_{k,l,m} \subset\, \Omega} f(\frac{k}{n},\, \frac{l}{n},\, \frac{m}{n})\ .$$

La somme est finie car Ω est borné.

On a de nouveau un résultat de convergence de ces approximations lorsque n tend vers $+\infty$.

6.0.1 Théorème

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur le domaine borné et régulier Ω de $\mathbb{R}^3$. La suite des sommes de Riemann $S_n(f)$ converge vers un nombre réel limite lorsque n tend vers $+\infty$.

6.0.2 Définition (Définition de l'intégrale triple)

On appelle intégrale triple de f sur Ω cette limite, et on la note $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz$.

Propriétés élémentaires de l'intégrale triple

On passe en revue les propriétés les plus simples de l'intégrale triple. Pour toutes fonctions continues f et g, pour tous réels λ et μ, on a:

1) **linéarité:** *Pour tout* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, *on* a
$$\iiint_\Omega (\lambda f + \mu g)dxdydz = \lambda \iiint_\Omega f dxdydz + \mu \iiint_\Omega g dxdydz.$$

2) **additivité par découpage:** Si $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ et $\Omega_1 \cap \Omega_2$ est de volume nul, *alors*
$$\iiint_\Omega f dxdydz = \iiint_{\Omega_1} f dxdydz + \iiint_{\Omega_2} f dxdydz.$$

3) **positivité, croissance:** Si $f(x,\ y,z) \leq g(x,\ y,z)$ *pour tout* $(x,\ y,z) \in \Omega$, *alors*
$$\iiint_\Omega f(x,\ y,z)dxdydz \leq \iiint_\Omega g(x,\ y,z)dxdydz.$$
En particulier, si $f \geq 0$ alors $\iiint_\Omega f(x,\ y,z)dxdydz \geq 0$.

4) **positivité par rapport au domaine:** Si $\Omega_1 \subset \Omega_2$ et $f \geq 0$ alors
$$\iiint_{\Omega_1} f(x,\ y,z)dxdydz \leq \iiint_{\Omega_2} f(x,\ y,z)dxdydz.$$

5) **Calcul de volume**

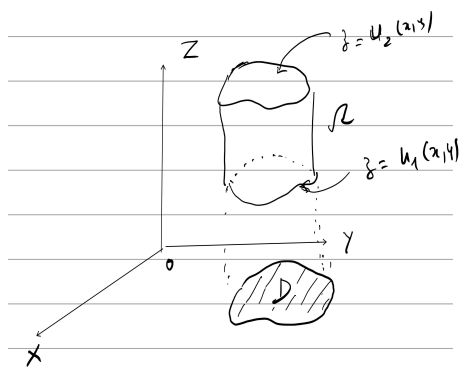
   Le volume de Ω est l'intégrale triple sur Ω de la fonction constante égale à 1 :
$$\boxed{\text{Volume de } \Omega = \iiint_\Omega dxdydz}$$

6.0.1 Calcul d'intégrales triples à l'aide d'intégrales doubles et simples

6.0.3 Théorème (Théorème de FUBINI sur un parallélépipède)
Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ un domaine bornée (à bord régulier) de l'espace et $f(x,y,z)$ une fonction continue sur Ω. Si $\Omega = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ (un parallélépipède) alors

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)dz\right)dy\right)dx = \int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)dz\right)dx\right)dy$$
$$= \int_{a_3}^{b_3}\left(\int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2} f(x,y,z)dy\right)dx\right)dz = \int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_3}^{b_3}\left(\int_{a_2}^{b_2} f(x,y,z)dy\right)dz\right)dx$$
$$= \int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{a_3}^{b_3}\left(\int_{a_1}^{b_1} f(x,y,z)dx\right)dz\right)dy = \int_{a_3}^{b_3}\left(\int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{a_1}^{b_1} f(x,y,z)dx\right)dy\right)dz.$$

6.0.4 Théorème (Théorème de FUBINI en piles(verticales))
.



Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur Ω, un domaine bornée (à bord régulier) de l'espace décrit en "pile" au dessus d'un domaine régulier $D \subset \mathbb{R}^2$:

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D \text{ et } u_1(x,y) \leq z \leq u_2(x,y)\right\}$$

où D est un domaine du plan, u_1 et u_2 sont des fonctions continues sur D. Alors

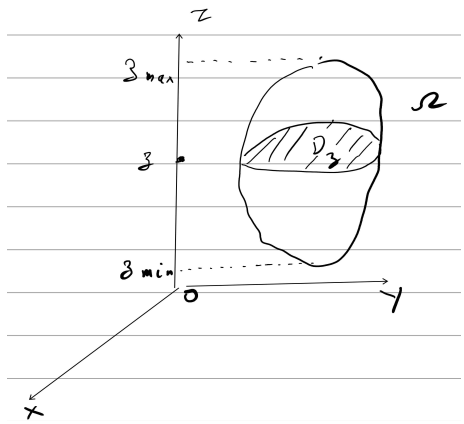
$$\boxed{\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iint_D \left(\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dxdy}$$

6.0.5 Remarque

D est la projection orthogonale de Ω sur le plan xOy (c'est l'ombre de Ω sur l'axe xOy, quand il est éclairé par dessus)

6.0.6 Théorème (Théorème de FUBINI en tranches ou couches (horizontales))

.



Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur Ω, un domaine bornée (à bord régulier) de l'espace décrit en "tranche"

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z_1 \leq z \leq z_2 \text{ et } (x, y) \in D_z \right\}$$

où pour tout z, la tranche $D_z = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x, y, z) \in \Omega \right\}$ (l'intersection de Ω avec le plan de hauteur z parallèle à $x0y$) est un domaine régulier du plan.

Alors

$$\boxed{\iiint_\Omega f(x, y, z) dxdydz = \int_{z_1}^{z_2} \left(\iint_{D_z} f(x, y, z) dxdy \right) dz}$$

<u>Application au calcul de volume:</u> Lorsque $f = 1$, on sait que $\iint_\Omega dxdydz$=Volume(Ω)

Les énoncés précédents donnent donc deux méthodes de calculs des volumes.

6.0.7 COROLLAIRE

1) Volume en piles,

$$\text{Volume } (\Omega) = \iint_D (u_2(x,\ y) - u_1(x,\ y))dxdy.$$

2) Volume en tranches,

$$\text{Volume } (\Omega) = \int_a^b \left(\iint_{D_z} dxdy \right) dz = \int_a^b \text{Aire } (D_z)dz.$$

Exemples de calcul d'intégrales triples

6.0.8 EXEMPLE. Soit le parallélépipède $V = [0,1] \times [1,2] \times [2,3]$, alors

$$\iiint_V (x^2 - 2yz)dxdydz = \int_2^3 \left(\int_1^2 \left(\int_0^1 (x^2 - 2yz)\, dx \right) dy \right) dz$$

$$= \int_2^3 \left(\int_1^2 [\frac{1}{3}x^3 - 2xyz]_{x=0}^{x=1}\, dy \right) dz$$

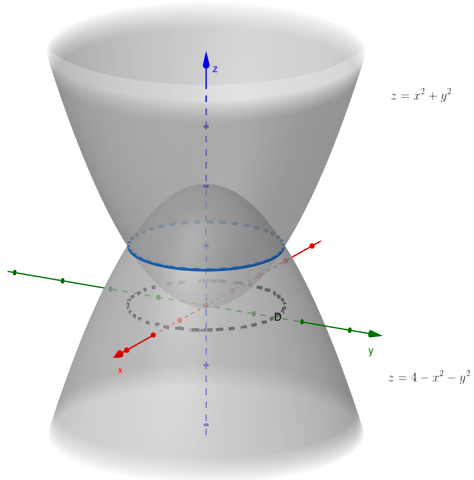
$$= \int_2^3 \left(\int_1^2 (\frac{1}{3} - 2yz))dy \right) dz \ = \int_2^3 [\frac{1}{3}y - y^2 z]_{y=1}^{y=2}\, dz$$

$$= \int_2^3 (\frac{2}{3} - 4z - \frac{1}{3} + z)dz \ = \int_2^3 \left(\frac{1}{3} - 3z \right)\ dz$$

$$= [\frac{1}{3}z - \frac{3}{2}z^2]_{z=2}^{z=3} \ = \frac{3}{3} - \frac{27}{2} - \frac{2}{3} + \frac{12}{2}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{15}{2} \ = \boxed{-\frac{43}{6}}$$

6.0.9 EXEMPLE. On se propose de calculer le volume du domaine borné Ω, déterminé par les paraboloïdes d'équations $z = x^2 + y^2$ et $z = 4 - x^2 - y^2$. On a $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq z \leq 4 - (x^2 + y^2)\}$.
La projection D de Ω sur le plan xOy est donnée par l'inégalité $x^2 + y^2 \leq 4 - (x^2 + y^2)$ i.e. $x^2 + y^2 \leq 2$, d'où D est le disque centré en $(0, 0)$ et de rayon $\sqrt{2}$.



Pour $(x,\ y)$ fixé dans D, pour z, la valeur minimale est $z = x^2 + y^2$ et la valeur maximale est $z = 4 - x^2 - y^2$. Alors

$$\mathrm{Vol}(\Omega) = \iiint_\Omega dxdydz = \iint_D \left(\int_{x^2+y^2}^{4-(x^2+y^2)} dz \right) dxdy = \iint_D \left(4 - (x^2+y^2) - (x^2+y^2)\right) dxdy$$

$$= \iint_D \left(4 - 2(x^2+y^2)\right) dxdy.$$

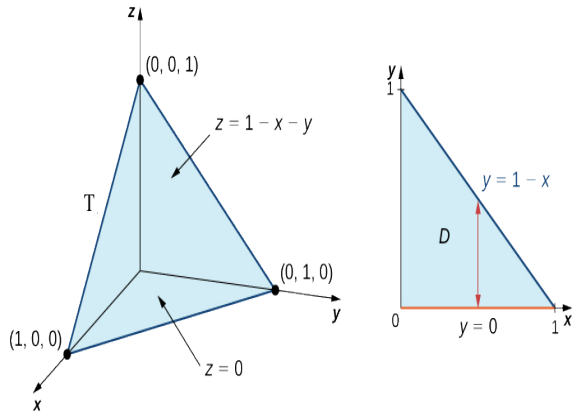
Le calcul de cette intégrale double est plus facile en coordonnées polaires. On aura

$$\mathrm{Vol}(\Omega) = \iint_D \left(4 - 2(x^2+y^2)\right) dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} (4 - 2r^2) r dr d\theta = [\theta]_0^{2\pi} \times \left[2r^2 - 2\frac{r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{2}} = 4\pi.$$

6.0.10 EXEMPLE. Calculer $I = \iiint_C zdxdydz$ sur le cube $C = [0,1]^3$. Ici le domaine est en pile de hauteur constante au dessus du carré $D = [0,\ 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$. D'après le théorème de Fubini, on a

$$I = \iint_D (\int_0^1 zdz) dxdy = \iint_D \frac{1}{2} dxdy = \frac{1}{2} \text{ Aire } (D) = \frac{1}{2}.$$

6.0.11 EXEMPLE (CALCUL DU VOLUME DU TÉTRAÈDRE STANDARD). Calculer le volume de $T = \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3, \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x + y + z \leq 1\}$. T est un tétraèdre plein de base le triangle $\Delta = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\}$ et de sommet $(0,0,1)$.



1) Si on procède en piles, pour tout z on a $u_1(x,\ y) = 0 \leq z \leq 1 - x - y = u_2(x,\ y)$ sur T alors

$$\text{Volume } (T) = \iint_\Delta (1 - x - y)dxdy = \int_0^1 (\int_0^{1-x} (1 - x - y)dy)dx = \int_0^1 ((1-x)^2 - \frac{(1-x)^2}{2})dx = \left[-\frac{(1-x)^3}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \text{ Aire(base) } \times \text{hauteur.}$$

2) Si on procède par couches (ou tranches), on constate que $0 \leq z \leq 1$ et pour tout z, la tranche est le triangle $\Delta_z = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 |\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1 - z\}$

$$\text{Volume}(T) = \int_0^1 \text{Aire}(\Delta_z)dz = \int_0^1 \frac{(1-z)^2}{2}dz = \left[-\frac{(1-z)^3}{6}\right]_{z=0}^{z=1} = \frac{1}{6}.$$