5.1.17 THÉORÈME
Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction des variables $(x,\ y)$ et $(x,\ y) = h(u,\ v)$ un changement de variables. Alors

$$\boxed{\iint_D f(x,\ y)dxdy = \iint_{h^{-1}(D)} f(x(u,v), y(u,v))\,|\det Jac_h(u,\ v)|dudv}$$

où $|\det Jac_h(u,\ v)| = \left|\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right|$ est la valeur absolue du Jacobien de h.

5.1.18 REMARQUE (REMARQUE IMPORTANTE:)
Cette formule de changement de variables est aussi valable sous des conditions moins fortes. Introduisons à cet effet la notion suivante:

5.1.19 DÉFINITION
une partie C de $\mathbb{R}^2$ est dite **négligeable** si son aire est nulle.

5.1.20 EXEMPLE. un point, un segment, un cercle sont des parties négligeables de $\mathbb{R}^2$; plus généralement, une réunion finie (même dénombrable) d'images d'applications de classe C^1, d'un intervalle fermé I dans $\mathbb{R}^2$ est une partie négligeable dans $\mathbb{R}^2$.

Voici les conditions moins fortes sous laquelle la formule de changement de variables est encore valable:

5.1.21 THÉORÈME
Soient D' et D des ouverts bornés de $\mathbb{R}^2$ et $h : D' \to D$ une application de classe C^1, donnée par $h(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$.

1. Il existe deux parties négligeables $C \subset D$ et $C' \subset D'$ telle que h est une bijection de $D' - C'$ sur $D - C$
2. $\det Jac_h(u,\ v) = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} \neq 0$, en tout point (u,v) de $D' - C'$.

Alors pour toute fonction f continue sur D, on a la formule de changement de variable :

$$\boxed{\iint_D f(x,\ y)dxdy = \iint_{D'} f(x(u,v), y(u,v))\,|\det Jac_h(u,\ v)|dudv}$$

Exemples de base

On considère un domaine élémentaire D. On commence par tester la formule de changement de variables sur des cas simples où elle peut être obtenue à la main.

5.1.22 EXEMPLE. Pour $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, on considère la translation de vecteur $(x_0,\ y_0)$

$$T_{(x_0,y_0)} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \mapsto & (x,y) = (u+x_0, v+y_0) \end{cases}$$

$T_{(x_0,y_0)}$ réalise un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ (sa réciproque est $T_{(-x_0,-y_0)}$) et donc de tout ouvert simple sur son image. En outre pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ on a Jac $T_{(x_0,y_0)}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et donc $|\det \mathrm{Jac}\, T_{(x_0,y_0)}| = 1$.

La formule de changement de variables donne, alors

$$\iint_D f(x,\ y)dxdy = \iint_{T_{(-x_0,-y_0)}(D)} f(u+x_0, v+y_0)dudv.$$

Par exemple, si $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ |a \le x \le b \text{ et } c(x) \le y \le d(x)\}$, alors $D' = T^{-1}_{(x_0,y_0)}(D) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \ | \ a - x_0 \le u \le b - x_0 \text{ et } c(u+x_0) - y_0 \le v \le d(u+x_0) - y_0\}$

$$\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)dydx = \int_{a-x_0}^{b-x_0} \int_{c(u+x_0)-y_0}^{d(u+x_0)-y_0} f(u+x_0, v+y_0)dudv.$$

5.1.23 REMARQUE
Cette formule s'obtient en fait facilement en faisant deux changements de variables successifs dans des intégrales simples.

5.1.24 EXEMPLE. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on note $T_{1,2,\lambda} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \mapsto (u+\lambda v, v) \end{cases}$. L'application $T_{1,2,\lambda}$ réalise un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ (sa réciproque est $T_{1,2,-\lambda}$). En outre pour tout $(u,\ v) \in \mathbb{R}^2$ on a

Jac $T_{1,2,\lambda}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et donc $|\det \mathrm{Jac}\, T_{1,2,\lambda}| = 1$.

La formule de changement de variables donne, alors

$$\iint_D f(x,\ y)dxdy = \iint_{T_{1,2,-\lambda}(D)} f(u+\lambda v, v)dudv.$$

Par exemple, si $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ |c \le y \le d \text{ et } a(y) \le x \le b(y)\}$, alors $D' = T_{1,2,-\lambda}(D) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \ | \ c \le v \le d \text{ et } a(v) - \lambda v \le u \le b(v) - \lambda v\}$

La formule de changement de variables donne dans ce cas:

$$\int_c^d \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dxdy = \int_c^d \int_{a(v)-\lambda v}^{b(v)-\lambda v} f(u+\lambda v, v)dudv.$$

À nouveau, il est facile de vérifier directement que cette formule.

5.1.25 EXEMPLE. On note par $S : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2 \\ (x,\ y) & \mapsto (y,\ x) \end{cases}$ (la symétrie par rapport à la droite $y = x$). l'application S réalise un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ (sa fonction réciproque est elle-même c-à-d $S^{-1} = S$). En outre pour tout $(x,\ y) \in \mathbb{R}^2$ on a

Jac $S(x,\ y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et donc $|\det \text{Jac } S| = |-1| = 1$. La formule de changement de variables nous donne, pour toute fonction continue $f : D \to \mathbb{R}$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{S(D)} f(y,x)dxdy.$$

En particulier, si le domaine D est symétrique par rapport à la droite $y = x$, (c-à-d $S(D) = D$) on aura $\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(y,x)dxdy$.

5.1.26 Exercice Montrer, sans calcul, que $\iint_{\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leq 1\}} (x^2 - y^2)dxdy = 0$.

5.1.27 EXEMPLE. Pour $\lambda \neq 0$ on note $h_{1,\lambda} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2 \\ (x,\ y) & \mapsto (\lambda x,\ y) \end{cases}$

L'application $h_{1,\lambda}$ réalise un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ (sa réciproque est $h_{1,\frac{1}{\lambda}}$). En outre pour tout $(x,\ y) \in \mathbb{R}^2$ on a $|\det Jac_{h_{1,\lambda}}(x,y)| = |\lambda|$. La formule de changement de variables nous dit alors que si on dilate le problème par un coefficient λ dans une direction, on muliplie les aires par $|\lambda|$, ce qu'on aurait encore pu vérifier directement.

5.1.28 REMARQUE

De même, si on dilate le problème par un coefficient λ dans les deux directions à l'aide de l'homothétie $h(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$, on muliplie dans ce cas les aires par λ^2, ce qu'on aurait pu aussi être vérifier directement.

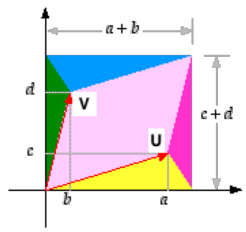
Dans ce cas, $f = 1$, et on a $Aire(D) = Aire(h(D')) = \iint_{h(D')} dxdy = \lambda^2 \iint_{D'} dudv = \lambda^2 Aire(D')$.

5.1.29 REMARQUE

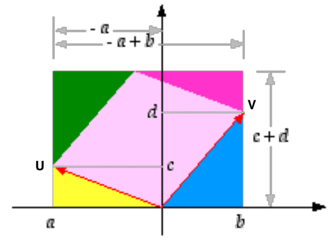
On rappelle que le déterminant permet de mesurer des aires en dimension 2. En effet, pour deux vecteurs non-colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans $\mathbb{R}^2$, la valeur absolue du déterminant $\det(\vec{u}, \vec{v})$ est égale à l'aire du parallèlogramme engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

En effet, si $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ sont de vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^2$. Soit M la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\det M = ad - bc \neq 0$. L'aire du parallélogramme engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (la partie rose de la figure) est égal à:

i) Aire du parallélogramme$=(a+b)(c+d) - (a+d)c - b(c+d) = ad - bc = \det M$ (figure 1)



(a) figure1



(b) figure2

ii) Aire du parallélogramme=$(-a+b)(c+d)-(-a)c-bd=-ad+bc=-\det M$ (figure2)

Dans tous les cas on aura, l'aire du parallélogramme= $|ad-bc|=|\det M|$.

Ainsi, le facteur $|\det Jac_h(x,y)|$ mesure le fait que le difféomorphisme h a tendance à dilater ou contracter les aires au voisinage de (x,y).

5.1.30 EXEMPLE (L'AIRE D'UNE ELLIPSE). Soient $a,b>0$. On considère l'ellipse

$$\mathcal{E}_{a,b}=\left\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2\mid\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1\right\}.$$

L'application $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ définie par $h(u,\ v)=(au,\ bv)$ est un C^1-difféomorphisme. En effet, $h^{-1}(x,y)=(\frac{x}{a},\frac{y}{b})$ est de classe C^1. En outre $\det Jac_h(u,\ v)=\dfrac{\partial x}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial v}-\dfrac{\partial x}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial u}=ab$. On peut donc effectuer le changement de variables $(x,\ y)=h(u,\ v)$, avec $dxdy=|\det Jac_h(u,\ v)|dudv=ab\,dudv$.

D'autre part, on a $u^2+v^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1$ donc h réalise une bijection du disque unité fermé $D=\{(u,v)|u^2+v^2\leq 1\}$ sur l'ellipse $\mathcal{E}_{a,b}$.

La formule de changement de variable nous donne alors:

$$Aire(\mathcal{E}_{a,b})=\iint_{\mathcal{E}_{a,b}}dxdy=ab\iint_D dudv=ab\cdot Aire(D)=ab\pi.$$

5.1.2 Retour aux changement de variables en coordonnées polaires

5.1.31 PROPOSITION

L'application $h:]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[\to\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0),x\leq 0\}$ définie par $h(r,\theta)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$ est un changement de variables c-à-d un difféomorphisme de classe C^1 (même de classe C^∞). En outre pour tout $(r,\theta)\in]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[$ on a $\det Jac_h(r,\theta)=r$.

Démonstration: 1) h est de classe C^1, car les fonctions $r\mapsto r$, $\theta\mapsto\cos\theta$ et $\theta\mapsto\sin\theta$ ont des dérivées continues.

2) h est bijective: En effet si $h(r,\theta)=h(r',\theta')$ alors $\|h(r,\theta)\|=\sqrt{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}=r$ et $\|h(r',\theta')\|=\sqrt{(r'\cos\theta)^2+(r'\sin\theta)^2}=r'$,d'où $r=r'$. Par suite $\cos\theta=\cos\theta'$

et $\sin\theta = \sin\theta'$ et donc $\theta' = \theta$. Finalement $(r,\theta) = (r',\theta')$, on obtient ainsi l'injectivité de h.

Maintenant, tout (x,y) dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0), x \leq 0\}$ est représenté par un angle $\theta \in]-\pi,\pi[$ et un module $r = \sqrt{(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2} > 0$, d'où la surjective de h.

On a donc montré que h est injective et surjective donc bijective.

3) pour tout $(r,\theta) \in D'$, $\det Jac_h(r,\theta) \neq 0$.
en effet, $Jac_h(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$ et donc $\det Jac_h(r,\theta) = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r \neq 0$. ∎

Comme $\det Jac_h(r,\theta) = r \neq 0$, en tout point $(r,\theta) \in D'$, d'après le théorème d'inversion locale, h^{-1} sera de classe C^1 en tout point $(x,y) = h(r,\theta) \in D$ ainsi h est un difféomorphisme de classe C^1.
On pourrait faire mieux et déterminer explicitement h^{-1}. En effet, on a $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ d'où $x^2 + y^2 = r^2$ par suite $r = \sqrt{x^2+y^2}$. D'autre part, pour $\tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = \dfrac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{r\sin\theta}{r+r\cos\theta} = \frac{y}{r+x}$. Comme $tan :]-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ a pour fonction réciproque $\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}[$ et $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{y}{r+x}$, on aura $\dfrac{\theta}{2} = \arctan\dfrac{y}{r+x}$ c-à-d $\theta = 2\arctan\dfrac{y}{r+x}$.

Ainsi, l'application réciproque de h, $h^{-1} : D \to D'$ qui à $(x,y) \in D$ associe ses "coordonnées polaires" $(r,\theta) \in D'$ est définie par

$$h^{-1}(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2},\ 2\arctan\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\right)\right).$$

5.1.33 REMARQUE
La demi-droite $C = \{(x,0), x \leq 0\}$ et son image réciproque $C' = h^{-1}(C) = \{(r,\theta) \mid \theta = \pm\pi\} \cup \{(0,\theta) \mid \theta \in [-\pi,\pi]\}$ sont des parties négligeables de $\mathbb{R}^2$.

D'après la remarque (importante), la formule de changement de variables en coordonnées polaires est encore valable pour tout domaine borné D de $\mathbb{R}^2$.

On retrouve la formule de changement de variables en coordonnées polaires

5.1.34 THÉORÈME (CHANGEMENT DE VARIABLES EN COORDONNÉES POLAIRES)
Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue, avec D domaine régulier. Alors on a

$$\boxed{\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{h^{-1}(D)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, rdrd\theta}$$

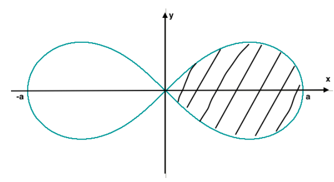
5.1.35 COROLLAIRE
Soient $D = \{(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid \theta \in [\theta_0, \theta_0+\phi]$ et $r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta)\}$, où $\theta_0 \in \mathbb{R}$, $\phi \in]-\pi,\pi]$ et deux fonctions continues r_1 et r_2 sur $[\theta_0, \theta_0+\phi]$ telles que $0 \leq r_1 < r_2$. Alors pour toute fonction f continue sur D on a:

$$\iint_D f(x,\ y)dxdy = \int_{\theta_0}^{\theta_0+\phi} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos(\theta),\ r\sin(\theta))rdrd\theta.$$

5.1.36 EXEMPLE (LA LEMNISCATE DE BERNOULLI). Soit $a > 0$, la lemniscate de Bernoulli L_a est la courbe d'équation (implicite)

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$$

En passant en coordonnées polaires, on a $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$, $r^2 = x^2+y^2$, soit $(x,y) \in L_a \iff (x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2) \iff r^4 = a^2r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = a^2r^2\cos(2\theta) \iff r = 0$ ou bien $r^2 = a^2\cos(2\theta)$. Comme $\cos(2\theta) = \frac{r^2}{a^2} \geq 0$, il est donc nécessaire que $2\theta \in [-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$, c-à-d $\theta \in [-\frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{\pi}{4}+k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$. Cette courbe est symétrique par rapport à l'axe Oy (elle est aussi symétrique par rapport à Ox et par rapport à l'origine), il suffit, pour l'étudier de se restreindre à $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$. Pour calculer l'aire du domaine délimité par L_a, il suffit de calculer l'aire



de la partie hachurée et de multiplier ce nombre par 2. D'après ce qui précède, le domaine hachuré D_1 est défini, en coordonnées polaires par: $0 \leq r \leq \sqrt{a^2\cos(2\theta)} = a\sqrt{\cos(2\theta)}$ et $\theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, Alors,

$$Aire(D_1) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{a\sqrt{\cos(2\theta)}} rdr\right) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{a\sqrt{\cos(2\theta)}} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{a^2\cos(2\theta)}{2}\right) d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\theta)d\theta = \frac{a^2}{2}\left[\frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{2}.$$

Ainsi, l'aire du domaine délimité par L_a est égal à $2 \times Aire(D_1) = a^2$.

5.1.37 EXEMPLE (VOLUME D'UNE BOULE B_R DE RAYON R). Par translation, on peut se ramener à la boule B_R centrée en $(0,0)$ et de rayon R. On a (voir page 38) que Volume$(B_R) = 2\iint_{D=\{x^2+y^2\leq R^2\}} \sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy$. On va calculer cette intégrale à l'aide des coordonnées polaires. Puisque $D' = \{(r,\ \theta) \in [0,\ \infty[\times[-\pi,\pi[\,|\, r \leq R\} = [0,R]\times[-\pi,\pi[$. et $\sqrt{R^2-x^2-y^2} = \sqrt{R^2-r^2}$, on obtient $\text{Vol}(B_R) = 2\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^R r\sqrt{R^2-r^2}dr = 4\pi\int_0^R r\sqrt{R^2-r^2}dr = 4\pi\int_0^R r(R^2-r^2)^{\frac{1}{2}}\,dr = 4\pi\left[-\frac{1}{3}(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^R = \frac{4}{3}\pi R^3$.