2) Moyenne et moyenne pondérée: Soit D un domaine de $\mathbb{R}^2$ et $f(x,y)$ une fonction continue sur ce domaine.

5.1.3 Définition

(i) On appelle **moyenne** de la fonction f sur le domaine D, le nombre réel $\dfrac{1}{\text{Aire}(D)} \iint_D f(x,y)\, dxdy$.

(ii) Si de plus le domaine D à une densité ρ, on appelle **moyenne pondérée** de la fonction f sur le domaine D, le nombre réel $\dfrac{1}{\text{masse}(D)} \iint_D f(x,y)\rho(x,y)\, dxdy$.

5.1.4 Définition

Un domaine D est dit **homogène** si sa densité est constante.

5.1.5 Remarque

Pour un domaine homogène, la moyenne pondérée est égale à la moyenne.

3) Centre de gravité (ou centre de masse):

5.1.6 Définition

Soit D un domaine de $\mathbb{R}^2$ de densité ρ. Le centre de gravité de D est le point de coordonnées (x_G, y_G) tel que x_G soit la moyenne pondérée des abscisses et y_G la moyenne pondérée des ordonnées, i.e.

$$x_G = \frac{1}{\text{masse}(D)} \iint_D x\, \rho(x,y)\, dxdy \quad \text{et} \quad y_G = \frac{1}{\text{masse}(D)} \iint_D y\, \rho(x,y)\, dxdy$$

---

4) Moment d'inertie:

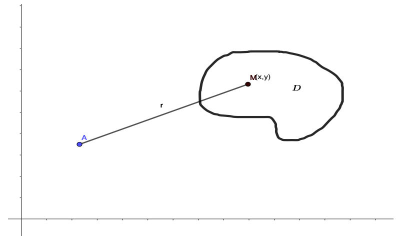
5.1.7 Définition (moment d'inertie par rapport à un point)

Soit D un domaine de $\mathbb{R}^2$ de densité ρ.

Le moment d'inertie de D par rapport à un point A de coordonnées (a,b) est le nombre réel positif:

$$I_{(a,b)} = \iint_D (r(x,y))^2 \rho(x,y)\, dxdy$$

où $r(x,y) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ est la distance de (x,y) au point (a,b).



5.1.8 EXEMPLE. Le moment d'inertie de D par rapport à l'origine est

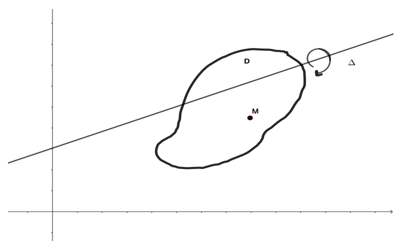
$$I_{(0,0)} = \iint_D ((x-a)^2 + (y-b)^2)\rho(x,y)\,dxdy$$

5.1.9 DÉFINITION (MOMENT D'INERTIE PAR RAPPORT À UNE DROITE)
Soit D un domaine de $\mathbb{R}^2$ de densité ρ et Δ une droite du plan.

Le moment d'inertie de D par rapport à la droite Δ est le nombre réel positif:

$$I_\Delta = \iint_D (r(x,y))^2 \rho(x,y)\,dxdy$$

où $r(x,y)$ est la distance de (x,y) à la droite Δ.



5.1.10 EXEMPLE (CALCUL DE LA DISTANCE D'UN POINT À UNE DROITE). .

(i) Si Δ est l'axe des abscisses (respectivement des ordonnées) alors $r(x,y) = |y|$ (respectivement $r(x,y) = |x|$).

(ii) Plus généralement, l'équation d'une droite Δ du plan est de la forme

$$ax + by + c = 0 \,\text{avec}\, (a,b) \neq (0,0).$$

Alors, la distance d'un point (x,y) à la droite Δ est donnée par la formule $r(x,y) = \dfrac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (à démontrer en exercice).
Par exemple, la distance du point $(3,4)$ à la droite $y = 2x+1$ est

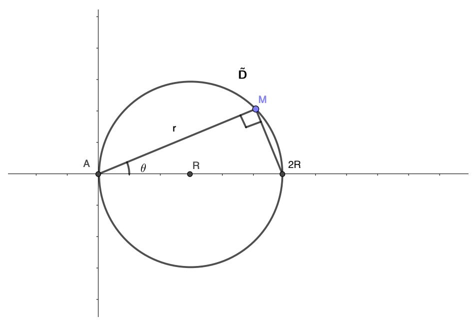
$$r(3,4) = \frac{|2 \times 3 - 4 + 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

5.1.11 EXEMPLE. Soit D un disque homogène de densité 1, centré en $(0,0)$ et de rayon $R > 0$.

(i) Le moment d'inertie de D par rapport à son centre est
$I_O = \int\int_D (r(x,y))^2\, dxdy = \int\int_D (x^2+y^2)\, dxdy.$
Pour calculer cette intégrale on passe en coordonnées polaires.
On a $D = \{r, \theta) \mid r \in [0,R],\ \theta \in [0,2\pi]\}$, $x^2+y^2 = r^2$ et $dA = rdrd\theta$, d'où

$$I_O = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^3 dr = [\theta]_0^{2\pi} \times \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{\pi R^4}{2}.$$

(ii) On veut calculer le moment d'inertie du disque par rapport à un point de sa circonférence (comme pour faire tourner un frisbee (disque volalnt)). Soit A un point de la circonférence du cercle. Pour faciliter les calculs, on va changer les coordonnées pour que A soit l'origine (voir figure).



Alors $I_A = \int\int_{\tilde{D}} (r(x,y))^2\, dxdy = \int\int_D (x^2+y^2)\, dxdy.$
Pour calculer cette intégrale en va donner une paramétrisation de $\tilde{D}$: on a voir figure, $0 \leq r \leq 2R\cos(\theta)$ et $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, ainsi
$\tilde{D} = \{r, \theta) \mid \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $0 \leq r \leq 2R\cos(\theta)\}$ et $dA = rdrd\theta$, d'où

$$I_A = \int\int_{\tilde{D}} (r(x,y))^2\, dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2R\cos(\theta)} r^3 dr \right) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{2R\cos(\theta)} \right) d\theta$$
$$= \frac{16R^4}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^4(\theta)\right) d\theta = 4R^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos(4\theta)}{8} + \frac{\cos(2\theta)}{2} + \frac{3}{8} \right) d\theta = \frac{3\pi R^4}{2}.$$

Ces calculs montre qu'il est 3 fois plus difficile de faire tourner un frisbee en un point de sa circonférence qu'en son centre.

5.1.1 Le changement de variables dans une intégrale double

On va commencer par un exemple simple.

5.1.12 EXEMPLE. On veut calculer l'aire du domaine borné délimité par l'ellipse $\mathcal{E}$ de demi-axes $a \geq b > 0$: $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$

$$\text{Aire}(\mathcal{E}) = \iint_{\{(\frac{x}{a})^2+(\frac{y}{b})^2\leq 1\}} dxdy.$$

La meilleure manière est de redimensionner l'ellipse en un cercle unité D, pour cela on fait le change $u = \frac{x}{a}$ et $v = \frac{y}{b}$. Alors, $dx = a\,du$ et $dy = b\,dv$, d'où $dxdy = ab\,dudv$. Ainsi,

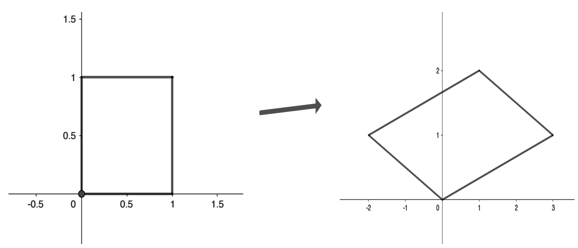
$$\text{Aire}(\mathcal{E}) = \iint_{\{(\frac{x}{a})^2+(\frac{y}{b})^2\leq 1\}} dxdy = ab \iint_{\{u^2+v^2\leq 1\}} dudv = ab.\text{Aire}(D) = ab\pi.$$

En général, on doit déterminer le facteur d'échelle (le rapport entre $dxdy$ et $dudv$).

5.1.13 EXEMPLE. Supposons qu'on fasse le changement de variables

$$\begin{cases} x = 3u - 2v \\ y = u + v. \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Quelle est la relation entre $dxdy$ et $dudv$? On considère un petit rectangle d'aire $\Delta u \Delta v$, son image est un parallélogramme d'aire ΔA dans les coordonnées xy. Dans ce cas, le facteur d'échelle est indépendant du choix du rectangle. On peut choisir alors le carré unité $A = [0,1] \times [0,1]$ dans les coordonnées u et v, son image est alors le parallélogramme A' de sommets $(0,0)$, $(3,1)$, $(-2,1)$ et $(1,2)$.



Comme $\text{Aire}(A) = 1$ et $\text{Aire}(A') = \det \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 + 2 = 5$, on en déduit que

$$dxdy = 5dudv.$$

Le cas général:

L'idée est si on fixe un point, au voisinage de ce point (localement), on peut faire une approximation linéaire et se ramener au cas linéaire.

Soit le changement de variables de classe C^1, $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v). \end{cases}$

Alors, $\begin{cases} \Delta x \simeq \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial x}{\partial v}\Delta v \\ \Delta y \simeq \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v, \end{cases}$ sous forme matricielle $\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v. \end{pmatrix}$

Le même argument que dans le cas linéaire, montre que le facteur d'échelle est le déterminant de la matrice.

5.1.14 Définition

Soient D' et D des ouverts de $\mathbb{R}^2$ et $h : D' \to D$ une application de classe C^1, donnée par $h(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$.

1) La matrice jacobienne de h au point (u,v) est la matrice

$$Jac_h(u,\ v) \ = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

2) Le jacobien de h au point (u,v) est le déterminant de la matrice $Jac_h(u,\ v)$

$$\det Jac_h(u,\ v) \ = \frac{\partial x}{\partial u}(u,v).\frac{\partial y}{\partial v}(u,v) - \frac{\partial y}{\partial u}(u,v).\frac{\partial x}{\partial v}(u,v).$$

5.1.15 Définition (Changement de variables)

Un changement de variables $h(u,\ v) = (x(u,v), y(u,v))$ est un difféomorphisme de classe C^1, $h : D' \to D : (u,\ v) \mapsto h(u,\ v) = (x,\ y)$ c'est-à-dire que h est une bijection de classe C^1 avec une application réciproque de classe C^1, $h^{-1} : D \to D' : (x,\ y) \mapsto h^{-1}(x,\ y) = (u,\ v)$.

5.1.16 Remarque

Pour montrer que h est un difféomorphisme de classe C^1, il suffit de montrer:

(i) h est une bijection

(ii) les dérivées partielles $\dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v)$, $\dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v)$, $\dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v)$ et $\dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v)$ sont continues

(iii) $\det Jac_h(u,\ v) \ = \frac{\partial x}{\partial u}(u,v).\frac{\partial y}{\partial v}(u,v) - \frac{\partial y}{\partial u}(u,v).\frac{\partial x}{\partial v}(u,v). \neq 0$ en tout point (u,v).

On peut énoncer maintenant la formule de changement de variables dans une intégrale double:

5.1.17 THÉORÈME

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction des variables $(x,\ y)$ et $(x,\ y) = h(u,\ v)$ un changement de variables. Alors

$$\boxed{\iint_D f(x,\ y)dxdy = \iint_{h^{-1}(D)} f(x(u,v),y(u,v))\,|\det Jac_h(u,\ v)|dudv}$$

où $|\det Jac_h(u,\ v)| = \left|\dfrac{\partial x}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial v} - \dfrac{\partial x}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial u}\right|$ est la valeur absolue du Jacobien de h.