2) Moyenne et moyenne pondérée: Soit D un domaine de $\mathbb{R}^2$ et $f(x,y)$ une fonction continue sur ce domaine.

5.1.3 Définition

(i) On appelle **moyenne** de la fonction f sur le domaine D, le nombre réel $\dfrac{1}{\text{Aire}(D)} \iint_D f(x,y)\, dxdy$.

(ii) Si de plus le domaine D à une densité ρ, on appelle **moyenne pondérée** de la fonction f sur le domaine D, le nombre réel $\dfrac{1}{\text{masse}(D)} \iint_D f(x,y)\rho(x,y)\, dxdy$.

5.1.4 Définition

Un domaine D est dit **homogène** si sa densité est constante.

5.1.5 Remarque

Pour un domaine homogène, la moyenne pondérée est égale à la moyenne.

3) Centre de gravité (ou centre de masse):

5.1.6 Définition

Soit D un domaine de $\mathbb{R}^2$ de densité ρ. Le centre de gravité de D est le point de coordonnées (x_G, y_G) tel que x_G soit la moyenne pondérée des abscisses et y_G la moyenne pondérée des ordonnées, i.e.

$$x_G = \frac{1}{\text{masse}(D)} \iint_D x\,\rho(x,y)\, dxdy \quad \text{et} \quad y_G = \frac{1}{\text{masse}(D)} \iint_D y\,\rho(x,y)\, dxdy$$

---

4) Moment d'inertie:

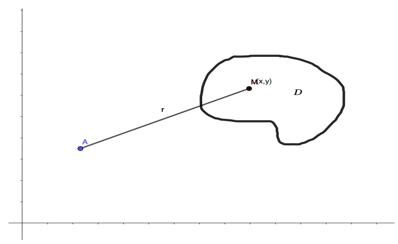
5.1.7 Définition (moment d'inertie par rapport à un point)

Soit D un domaine de $\mathbb{R}^2$ de densité ρ.

Le moment d'inertie de D par rapport à un point A de coordonnées (a,b) est le nombre réel positif:

$$I_{(a,b)} = \iint_D (r(x,y))^2 \rho(x,y)\, dxdy$$

où $r(x,y) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ est la distance de (x,y) au point (a,b).



5.1.8 Exemple. Le moment d'inertie de D par rapport à l'origine est

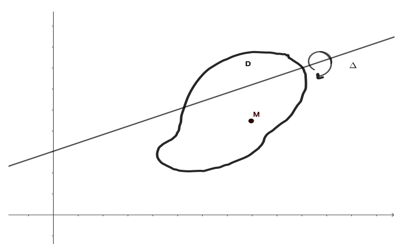
$$I_{(0,0)} = \iint_D ((x-a)^2 + (y-b)^2)\rho(x,y)\, dxdy$$

5.1.9 Définition (moment d'inertie par rapport à une droite)
Soit D un domaine de $\mathbb{R}^2$ de densité ρ et Δ une droite du plan.

Le moment d'inertie de D par rapport à la droite Δ est le nombre réel positif:

$$I_\Delta = \iint_D (r(x,y))^2 \rho(x,y)\, dxdy$$

où $r(x,y)$ est la distance de (x,y) à la droite Δ.



5.1.10 Exemple (Calcul de la distance d'un point à une droite). .

(i) Si Δ est l'axe des abscisses (respectivement des ordonnées) alors $r(x,y) = |y|$ (respectivement $r(x,y) = |x|$).

(ii) Plus généralement, l'équation d'une droite Δ du plan est de la forme

$$ax + by + c = 0 \,\text{avec}\, (a,b) \neq (0,0).$$

Alors, la distance d'un point (x, y) à la droite Δ est donnée par la formule
$r(x,y) = \dfrac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (à démontrer en exercice).
Par exemple, la distance du point $(3,4)$ à la droite $y = 2x+1$ est

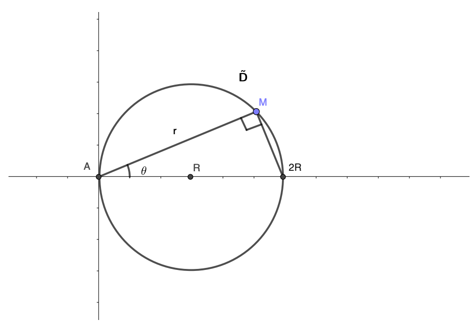
$$r(3,4) = \frac{|2\times 3 - 4 + 1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

5.1.11 EXEMPLE. Soit D un disque homogène de densité 1, centré en $(0,0)$ et de rayon $R > 0$.

(i) Le moment d'inertie de D par rapport à son centre est
$I_O = \iint_D (r(x,y))^2\, dxdy = \iint_D (x^2+y^2)\, dxdy.$
Pour calculer cette intégrale on passe en coordonnées polaires.
On a $D = \{r,\theta) \,|\, r \in [0,R],\ \theta \in [0,2\pi]\}$, $x^2+y^2 = r^2$ et $dA = rdrd\theta$, d'où

$$I_O = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^3 dr = [\theta]_0^{2\pi} \times \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{\pi R^4}{2}.$$

(ii) On veut calculer le moment d'inertie du disque par rapport à un point de sa circonférence (comme pour faire tourner un frisbee (disque volalnt)). Soit A un point de la circonférence du cercle. Pour faciliter les calculs, on va changer les coordonnées pour que A soit l'origine (voir figure).



Alors $I_A = \iint_{\tilde{D}} (r(x,y))^2\, dxdy = \iint_D (x^2+y^2)\, dxdy.$
Pour calculer cette intégrale en va donner une paramétrisation de $\tilde{D}$: on a voir figure, $0 \le r \le 2R\cos(\theta)$ et $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, ainsi
$\tilde{D} = \{r,\theta) \,|\, \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $0 \le r \le 2R\cos(\theta)\}$ et $dA = rdrd\theta$, d'où

$$I_A = \iint_{\tilde{D}} (r(x,y))^2\, dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2R\cos(\theta)} r^3 dr \right) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{2R\cos(\theta)} \right) d\theta$$
$$= \frac{16R^4}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^4(\theta) \right) d\theta = 4R^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos(4\theta)}{8} + \frac{\cos(2\theta)}{2} + \frac{3}{8} \right) d\theta = \frac{3\pi R^4}{2}.$$

Ces calculs montre qu'il est 3 fois plus difficile de faire tourner un frisbee en un point de sa circonférence qu'en son centre.

5.1.1 Changement de variables

5.1.12 DÉFINITION

Soient D' et D des ouverts bornés de $\mathbb{R}^2$ et $h : D' \to D$ une application de classe C^1, donnée par $h(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$.

1) La matrice jacobienne de h au point (u,v) est la matrice

$$Jac_h(u,\ v) \ = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

2) Le jacobien de h au point (u,v) est le déterminant de la matrice $Jac_h(u,\ v)$

$$\det Jac_h(u,\ v) \ = \frac{\partial x}{\partial u}(u,v).\frac{\partial y}{\partial v}(u,v) - \frac{\partial y}{\partial u}(u,v).\frac{\partial x}{\partial v}(u,v).$$

5.1.13 DÉFINITION (CHANGEMENT DE VARIABLES)

Un changement de variables $h(u,\ v) = (x(u,v), y(u,v))$ est un difféomorphisme de classe C^1, $h : D' \to D : (u,\ v) \mapsto h(u,\ v) = (x,\ y)$ c'est-à-dire que h est une bijection de classe C^1 avec une application réciproque de classe C^1, $h^{-1} : D \to D' : (x,\ y) \mapsto h^{-1}(x,\ y) = (u,\ v)$.

5.1.14 REMARQUE

Pour montrer que h est un difféomorphisme de classe C^1, il suffit de montrer:

(i) h est une bijection, d'où h^{-1} existe.

(ii) les dérivées partielles $\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)$, $\frac{\partial x}{\partial v}(u,v)$, $\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)$ et $\frac{\partial y}{\partial v}(u,v)$ sont continues, d'où h est de classe C^1

(iii) $\det Jac_h(u,\ v) = \frac{\partial x}{\partial u}(u,v).\frac{\partial y}{\partial v}(u,v) - \frac{\partial y}{\partial u}(u,v).\frac{\partial x}{\partial v}(u,v). \neq 0$ en tout point (u,v). En effet, grâce au théorème d'inversion locale, h^{-1} sera de classe C^1

5.1.15 Remarque

L'application réciproque d'une application de classe C^1, n'est pas toujours dérivable, Par exemple, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ est bijective et de classe C^∞, mais sa fonction réciproque, $f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt[3]{y} \text{ si } y \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-y} \text{ si } y < 0, \end{cases}$ n'est pas dérivable en 0.

C'est pour cela qu'on impose dans la définition de changement de variables, que h^{-1} soit de classe C^1.

5.1.2 Retour aux changement de variables en coordonnées polaires

5.1.16 Proposition

L'application $h :]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[\to \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0), x \leq 0\}$ définie par $h(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ est un changement de variables c-à-d un difféomorphisme de classe C^1 (même de classe C^∞). En outre pour tout $(r,\theta) \in]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[$ on a $\det Jac_h(r,\theta) = r$.

Démonstration: 1) h est de classe C^1, car les fonctions $r \mapsto r$, $\theta \mapsto \cos\theta$ et $\theta \mapsto \sin\theta$ ont des dérivées continues.

2) h est bijective: En effet si $h(r,\theta) = h(r',\theta')$ alors $\|h(r,\theta)\| = \sqrt{(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2} = r$ et $\|h(r',\theta')\| = \sqrt{(r'\cos\theta)^2 + (r'\sin\theta)^2} = r'$,d'où $r = r'$. Par suite $\cos\theta = \cos\theta'$ et $\sin\theta = \sin\theta'$ et donc $\theta' = \theta$. Finalement $(r,\theta) = (r',\theta')$, on obtient ainsi l'injectivité de h.

Maintenant, tout (x,y) dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0), x \leq 0\}$ est représenté par un angle $\theta \in]-\pi,\pi[$ et un module $r = \sqrt{(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2} > 0$, d'où la surjective de h. On a donc montré que h est injective et surjective donc bijective.

3) pour tout $(r,\theta) \in D'$, $\det Jac_h(r,\theta) \neq 0$.
en effet, $Jac_h(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$ et donc $\det Jac_h(r,\theta) = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r \neq 0$.

Comme $\det Jac_h(r,\theta) = r \neq 0$, en tout point $(r,\theta) \in D'$, d'après le théorème d'inversion locale, h^{-1} sera de classe C^1 en tout point $(x,y) = h(r,\theta) \in D$ ainsi h est un difféomorphisme de classe C^1.

5.1.18 Remarque

On peut faire mieux et déterminer explicitement h^{-1}. En effet, on a $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ d'où $x^2 + y^2 = r^2$ par suite $r = \sqrt{x^2+y^2}$. D'autre part, pour $\tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = \dfrac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{r\sin\theta}{r+r\cos\theta} = \frac{y}{r+x}$. Comme $tan :]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ a pour fonction réciproque $\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}[$ et $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{y}{r+x}$, on aura $\dfrac{\theta}{2} = \arctan\dfrac{y}{r+x}$ c-à-d $\theta = 2\arctan\dfrac{y}{r+x}$.

Ainsi, l'application réciproque de h, $h^{-1} : D \to D'$ qui à $(x,y) \in D$ associe ses "coordonnées polaires" $(r,\theta) \in D'$ est définie par

$$h^{-1}(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2},\ 2\arctan\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\right)\right).$$

5.1.19 Remarque

La demi-droite $C = \{(x,0), x \leq 0\}$ et son image réciproque $C' = h^{-1}(C) = \{(r,\theta) \mid \theta = \pm\pi\} \cup \{(0,\theta) \mid \theta \in [-\pi,\pi]\}$ sont des parties négligeables de $\mathbb{R}^2$.

D'après la remarque (importante), la formule de changement de variables en coordonnées polaires est encore valable pour tout domaine borné D de $\mathbb{R}^2$.