5.0.13 EXEMPLE (DE CALCUL D'INTÉGRALES DOUBLES). .

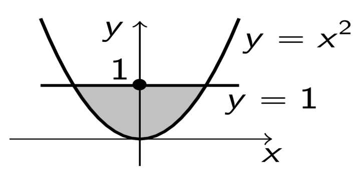
1)
$$\iint_{[0,1]\times[0,\pi/2]} x\cos y\, dxdy = \int_0^1 x\, dx \int_0^{\pi/2} \cos y\, dy$$
$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 [\sin y]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}$$

2)
$$\iint_{[0,2]\times[0,1]} \frac{1+x^2}{1+y^2}\, dxdy = \int_0^2 (1+x^2)dx \int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\, dy$$
$$= \left[x+\frac{x^3}{3}\right]_0^2 [\arctan(y)]_0^1 = (2+\frac{8}{3})(\frac{\pi}{4}) = \frac{7\pi}{6}.$$

3) $\displaystyle\iint_{[-1,1]\times[0,1]} (x^2y-1)\, dxdy = \int_{-1}^1 (\int_0^1 x^2y-1\, dy)dx$
$$= \int_{-1}^1 [\frac{1}{2}x^2y^2 - y]_0^1\, dx = \int_{-1}^1 (\frac{1}{2}x^2-1)dx = [\frac{1}{6}x^3-x]_{-1}^1 = -\frac{5}{3}$$

5.0.14 REMARQUE
On aurait pu opérer de cette manière:
$$\iint_{[-1,1]\times[0,1]} (x^2y-1)\, dxdy = \iint_{[-1,1]\times[0,1]} x^2ydxdy - \iint_{[-1,1]\times[0,1]} dxdy$$
$= \displaystyle\int_{-1}^1 x^2dx \int_0^1 ydy - \text{Aire}([-1,1]\times[0,1]) = [\frac{x^3}{3}]_{-1}^1 \times [\frac{y^2}{2}]_0^1 - 2 = \frac{2}{3}\times\frac{1}{2} - 2 =$
$\displaystyle\frac{2}{6} - 2 = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3}$

5.0.15 EXEMPLE. Soit à calculer l'aire de D la partie bornée de $\mathbb{R}^2$ délimitée par la parabole d'équation, $y = x^2$ et la droite $y = 1$.



On peut représenter D par $D = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in [-1,\ 1],\ x^2 \le y \le 1]\}$, c'est un domaine de type I.

Par conséquent: $\iint_D dxdy \;= \int_{-1}^{1}(\int_{x^2}^{1} dy)dx$

$$= \int_{-1}^{1}[y]_{x^2}^{1}dx = \int_{-1}^{1}(1-x^2)dx$$

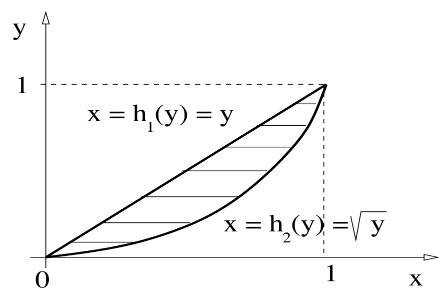
$$= [x-\frac{1}{3}x^3]_{-1}^{1} = (1-\frac{1}{3})-(-1+\frac{1}{3}) = 2-\frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

5.0.16 EXEMPLE. Calculer l'intégrale $\iint_D (x^2+y^2)dxdy$ où D est le triangle de sommets $(0,1)$, $(0,-1)$ et $(1,0)$.
Pour cela on décrit D comme un domaine de type I:
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x \le 1,\ x-1 \le y \le 1-x\}$ on aura

$$\iint_D (x^2+y^2)dxdy = \int_0^1 \left(\int_{x-1}^{1-x}(x^2+y^2)dy\right)dx = \int_0^1 [x^2y+\frac{y^3}{3}]_{x-1}^{1-x}dx = 2\int_0^1 (x^2(1-x)+\frac{(1-x)^3}{3})dx$$

$$= 2[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{(1-x)^4}{12}]_0^1 = 2((\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-0)-(0-0-\frac{1}{12})) = 2(\frac{4-3+1}{12}) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

5.0.17 EXEMPLE. Soit à calculer $\iint_D (x^2+y^2)dxdy$ où $D = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \in [0,\ 1],\ y \le x \le \sqrt{y}\}$, c'est un domaine de type II.



On a alors

$$\iint_D (x^2+y^2)dxdy = \int_0^1 \left(\int_y^{\sqrt{y}}(x^2+y^2)dx\right)dy = \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3}+xy^2\right]_y^{\sqrt{y}} dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{3}y^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{3}y^3-y^3\right)dy$$

$$= \left[\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{7}y^{\frac{7}{2}}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}y^4-\frac{1}{4}y^4\right]_0^1 = \frac{1}{3}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{7}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}-\frac{1}{4}$$

$$= \frac{2}{15}+\frac{2}{7}-\frac{1}{12}-\frac{1}{4} = \frac{9}{3\times5\times7} = \frac{3}{35}.$$

5.0.18 EXEMPLE. On veut calculer $I = \int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} \frac{e^y}{y} dydx$, on sait que I existe puisque la fonction à intégrer est continue, par contre comme $y \to \frac{e^y}{y}$ n'a pas de primitive (qui s'exprime avec les fonctions élémentaires) on ne peut la calculer, une solution comme c'est une intégrale double, c'est d'échanger l'ordre d'intégration:

1) le domaine d'intégration est $D = \{(x,y) \,|\, 0 \leq x \leq 1 \text{ et } x \leq y \leq \sqrt{x}\}$ (de type I), qu'on peut écrire en domaine de type II, $D = \{(x,y) \,|\, 0 \leq 1 \leq y \text{ et } y^2 \leq x \leq y\}$.

2) Alors

$$I = \int_0^1 \int_{y^2}^{y} \frac{e^y}{y} dxdy = \int_0^1 \frac{e^y}{y}(y - y^2)dy = \int_0^1 (e^y - ye^y)dy = [-ye^y + 2e^y]_0^1 = e - 2.$$

Intégration sur un domaine réunion de domaines élémentaires

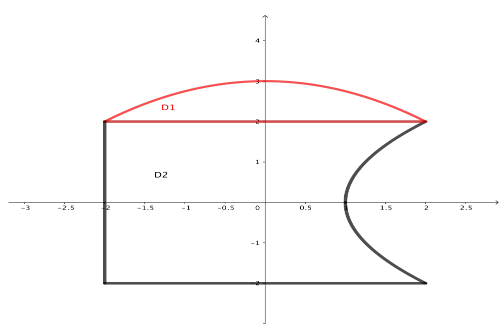
Si $D \subset \mathbb{R}^2$ n'est pas un rectangle et ne peut être défini en utilisant les graphes de deux fonctions, on décompose si possible, D en domaines du type I et II et on utilise ensuite la propriété 3.

Si D est réunion de deux domaines D_1 et D_2 et que D_1 et D_2 ont une intersection vide, ou contenue dans leur bord (autrement dit, les intérieurs des deux domaines ne se rencontrent pas).

Dans ce cas, si $f : D \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur D on a

$$\boxed{\iint_D f(x,\, y)\, dxdy = \iint_{D_1} f(x,\, y)\, dxdy + \iint_{D_2} f(x,\, y)\, dxdy}$$

5.0.19 EXEMPLE. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -2 \leq x \leq \frac{y^2}{4} + 1 \text{ et } -2 \leq y \leq \frac{-x^2}{4} + 3\}$



Alors $D = D_1 \cup D_2$ avec $D_1 = \{(x,\ y) \in D | x \in [-2,\ 2],\ 2 \leq y \leq \frac{-x^2}{4} + 3]\}$
et
$D_2 = \{(x,\ y) \in D | y \in [-2,\ 2],\ -2 \leq x \leq \frac{y^2}{4} + 1]\}$

Par conséquent: $\iint_D f(x,y)dxdy = \int_{-2}^{2}(\int_{2}^{\frac{-x^2}{4}+3} f(x,y)dy)dx + \int_{-2}^{2}(\int_{-2}^{\frac{y^2}{4}+1} f(x,y)dx)dy$

5.0.20 EXEMPLE. Quelle est l'aire du domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y^2 + 2y \leq x \leq y + 2\}$?

Un calcul nous donne les ordonnées des deux points d'intersection des courbes $x = y^2 + 2y$ et $x = y + 2$, soit $y = -2$ et $y = 1$. En utilisant une intégration par tranches, on aura

$$Aire(D) = \int_{-2}^{1}\int_{y^2+2y}^{y+2} dxdy = \int_{-2}^{1}(y+2-y^2-2y)dxdy = \left[-\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + 2y\right]_{-2}^{1} = \frac{9}{2}.$$

5.0.21 REMARQUE

Le calcul de l'aire de D par piles est moins simple, il faudrait résoudre $y^2 + 2y = x$ pour trouver les bornes d'intégrations et faire un découpage de D.

5.0.22 EXEMPLE (VOLUME D'UNE BOULE DE RAYON R). Soit une boule de rayon $R > 0$, par translation on se ramène à $B_R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$, la boule centrée en l'origine et de rayon $R > 0$. D'autre part Volume$(B_R) =$ Volume$(B_1)R^3$, il suffit donc de calculer Volume(B_1).

Par symétrie, son volume est égal au double de celui de la demi-boule supérieure

$$B^+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \geq 0\},$$

(qui forme le volume délimité par le graphe de la fonction $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. et le disque $x^2 + y^2 \leq 1$)

On a alors

$$\text{Volume}(B_1) = 2\iint_{D_1} \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dxdy$$

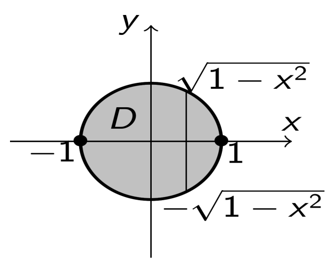
où $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$ est le disque de rayon 1.

On peut représenter D_1 comme un domaine de type I,

$$D_1 = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in [-1,1],\ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}]\},$$

$$\text{d'où: Volume}(B_1) = 2\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}dy\right)dx$$
$$= 2\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\frac{y^2}{1-x^2}}\,dy\right)dx.$$

En posant $\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}} = \sin t$, $-\dfrac{\pi}{2} \le t \le \dfrac{\pi}{2}$, on aura $dy = \sqrt{1-x^2}\cos t\,dt$ et $\sqrt{1-\frac{y^2}{1-x^2}} = \cos t$.



$$\text{Volume}(B_1) = 2\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\frac{y^2}{1-x^2}}dy = 2\int_{-1}^{1}dx\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{1-x^2}\cos t\sqrt{1-x^2}\cos t\,dt$$
$$= 2\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t\,dt$$

puisque $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t\,dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\cos(2t)+1}{2}dt = \frac{\pi}{2}$.

$$\boxed{\text{Volume}(B_1) = \pi\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx = \pi[x-\frac{1}{3}x^3]_{-1}^{1} = \frac{4\pi}{3}}.$$

par suite

$$\boxed{\text{Volume}(B_R) = \frac{4\pi R^3}{3}}.$$

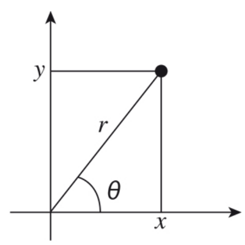
On verra, qu'avec un changement de variables, les calculs sont beaucoup plus simples.

5.0.4 Les coordonnées polaires:

Le calcul de l'intégrale $I = \iint_D (1 - x^2 - y^2)dxdy$ où $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } x \geq 0, y \geq 0\}$ en coordonées cartésiennes (voir page 46) n'est pas très adapté à ces coordonnées, le domaine est circulaire et la fonction ne dépend que de la distance à l'origine; on va voir qu'il est beaucoup plus aisé en coordonnées polaires.

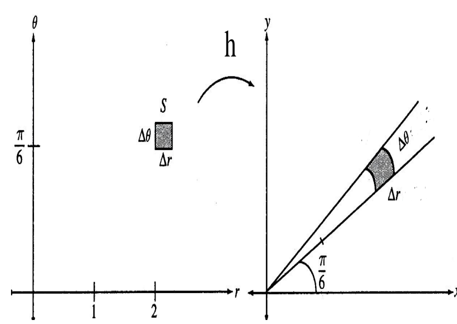
les coordonnées polaires

On rappel qu'en coordonnées polaires, un point $M = (x, y)$ du plan est entièrement déterminé par sa distance r à l'origine et l'angle θ que fait $\overrightarrow{OM}$ avec l'axe Ox.



Les relations traduisant le passage aux coordonnées polaires sont alors $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$.
On va voir maintenant, comment l'élément d'aire $dA = dxdy$ (ou $dydx$) s'écrit en coordonnées polaires.

Soit h l'application définie par
$h(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) = (x, y)$



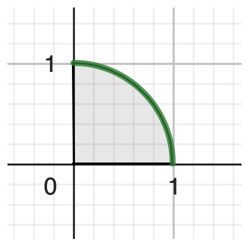
Par l'application h, le rectangle $S = [r, r'] \times [\theta, \theta']$ est transformé en un morceau de couronne situé dans le secteur angulaire délimité par les rayons r et r' et d'angle $\Delta\theta = \theta' - \theta$. On pose $\Delta r = r' - r$.

On remarquera alors que l'aire du rectangle est égale à $\Delta r \times \Delta\theta$ et que celle de son image est

$$\frac{1}{2}(r'^2 - r^2)\Delta\theta = \frac{1}{2}(r' + r)\Delta r\Delta\theta$$

Lorsque r' est très proche de r, $\frac{1}{2}(r' + r) \sim r$, par suite l'aire se retrouve multipliée par r, ainsi on a $dA = rdrd\theta$.

5.0.23 EXEMPLE. On reprend l'intégrale $I = \iint_D (1 - x^2 - y^2)dxdy$ où $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } x \geq 0, y \geq 0\}$.



En coordonnées polaires $D = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1 \text{ et } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\} = [0, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}]$, l'intégrand $(1 - (x^2 + y^2))dA = (1 - r^2)rdrd\theta$ d'où

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (1 - r^2)rdrd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \times \int_0^1 (r - r^3)dr = \frac{\pi}{2} \times \left[\frac{r}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2} \times (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) = \frac{\pi}{8}.$$

5.1 Applications

Plusieurs quantités physiques peuvent être exprimées comme des intégrales multiples. De telles expressions sont fondées sur la définition de l'intégrale comme la limite d'une somme.

1) La masse d'un solide (plat)

   On a vu par exemple que si D est un domaine borné du plan, alors

   Aire $(D) = \iint_D dxdy$.

   Plus généralement, si D a une densité de masse (par unité d'aire) ρ, alors $\Delta_m = \rho\Delta A$, par suite la **masse totale** de D est donnée par l'intégrale

   $M(D) = \iint_D dm = \iint_D \rho(x,y)dxdy.$

5.1.1 EXEMPLE. De la farine est éparpillée sur le sol selon une densité $\rho(x,y) = \dfrac{1}{(\sqrt{x^2+y^2}+1)^2}$, où $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Déterminer la quantité totale de farine éparpillée sur un disque D de rayon $R > 0$ centré en l'origine.

Réponse: En coordonnées polaires, on a

$\rho(r,\theta) = \frac{1}{(r+1)^2}$ et $D = \{(r,\theta) |\ r \in [0,\ R], \theta \in [0, 2\pi[\}$. Ainsi:

la quantité totale de farine = la masse totale $M(D)$

$$= \iint_D \frac{1}{(r+1)^2}\, rdrd\theta = \iint_D \frac{r}{(r+1)^2}\, drd\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^R \left(\frac{r+1}{(r+1)^2} - \frac{1}{(r+1)^2}\right) dr$$

$$= 2\pi \int_0^R \left(\frac{1}{r+1} - \frac{1}{(r+1)^2}\right) d\,r = 2\pi \left[\ln(r+1) + \frac{1}{r+1}\right]_0^R = 2\pi \left(\ln(R+1) + \frac{1}{R+1} - 1\right)$$
$$= 2\pi \left(\ln(R+1) - \frac{R}{R+1}\right).$$

5.1.2 REMARQUE

Comme une masse est toujours positive, on obtient du calcul précédent, l'inégalité:

$$\ln(t+1) \geq \frac{t}{t+1}, \text{ pour tout } t \geq 0.$$