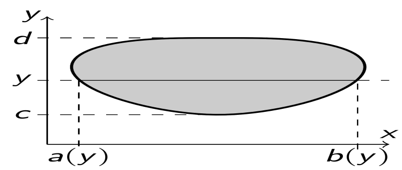
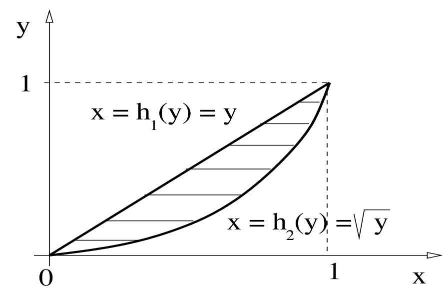


5.0.16 EXEMPLE. Soit à calculer $\iint_D (x^2+y^2)dxdy$ où $D = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \in [0,\ 1],\ y \leq x \leq \sqrt{y}\}$, c'est un domaine de type II.



On a alors

$$\iint_D (x^2+y^2)dxdy = \int_0^1 \left(\int_y^{\sqrt{y}} (x^2+y^2)dx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + xy^2 \right]_y^{\sqrt{y}} dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{3}y^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}y^3 - y^3 \right) dy$$

$$= \left[\frac{1}{3} \times \frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{7}y^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{4}y^4 \right]_0^1 = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{7} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{2}{15} + \frac{2}{7} - \frac{1}{12} - \frac{1}{4} = \frac{9}{3 \times 5 \times 7} = \frac{3}{35}.$$

5.0.17 EXEMPLE. On veut claculer $I = \int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} \frac{e^y}{y} dydx$, on sait que I existe puisque la fonction à intégrer est continue, par contre comme $y \to \frac{e^y}{y}$ n'a pas de primitive (qui s'exprime avec les fonctions élémentaires) on ne peut la calculer, une solution comme c'est une intégrale double, c'est d'échanger l'ordre d'intégration:

1) le domaine d'intégration est $D = \{(x,y) \,|\, 0 \leq x \leq 1 \text{ et } x \leq y \leq \sqrt{x}\}$ (de type I), qu'on peut écrire en domaine de type II $D = \{(x,y) \,|\, 0 \leq 1 \leq y \text{ et } y^2 \leq x \leq y\}$

2) Alors

$$I = \int_0^1 \int_{y^2}^{y} \frac{e^y}{y} dxdy = \int_0^1 \frac{e^y}{y}(y-y^2)dy = \int_0^1 e^y - ye^y dy = [-ye^y + 2e^y]_0^1 = e - 2.$$

5.0.3 Les coordonnées polaires:

5.0.18 EXEMPLE. On se propose de calculer $I = \iint_D (1 - x^2 - y^2) dxdy$ où $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } x \geq 0, y \geq 0\}$.

Comment trouver les bornes? on fixe x constant; et considère l'intersection de la parallèle à l'axe des y avec D. on trouve $y = 0$ et $y = \sqrt{1 - x^2}$ pour l'intégrale intérieure. Pour l'integral extérieure: $x = 0$ et $x = 1$. Ainsi

$$I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2) dydx.$$

1) $\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2) dy = [(1 - x^2)y - y^3/3]_0^{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{2}{3}(1 - x^2)^{3/2}$

2) $I = \int_0^1 \frac{2}{3}(1 - x^2)^{3/2} dx$, on fait un changement de variable:
$x = \sin\theta$, $dx = \cos\theta d\theta$, et les bornes $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $(1 - x^2)^{3/2} = \cos^3(\theta)$.

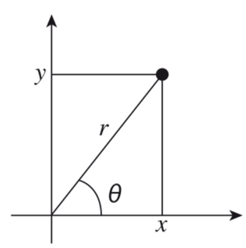
D'où $I = \dfrac{2}{3} \displaystyle\int_0^1 (1 - x^2)^{3/2} dx = \dfrac{2}{3} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(\theta) d\theta = \dfrac{\pi}{8}$.

(on a utiliser pour calculer la dernière intégrale la linéarisation: $\cos^4(\theta) = \frac{\cos(4\theta)}{8} + \frac{\cos(2\theta)}{2} + \frac{3}{8}$)

Le calcul qu'on vient de faire n'est pas très approprié en coordonnées cartésiennes, on va voir qu'il est beaucoup plus aisé en coordonnées polaires.

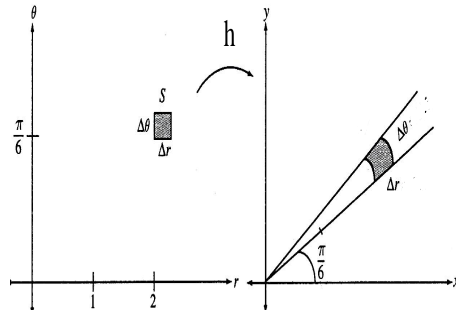
les coordonnées polaires

On rappel qu'en coordonnées polaires, un point $M = (x, y)$ du plan est entièrement déterminé par sa distance r à l'origine et l'angle θ que fait $\overrightarrow{OM}$ avec l'axe Ox.



Les relations traduisant le passage aux coordonnées polaires sont alors $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$.
On va voir maintenant, comment l'élément d'aire $dA = dxdy$ (ou $dydx$) s'écrit en coordonnées polaires.

Soit h l'application définie par
$h(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) = (x,y)$

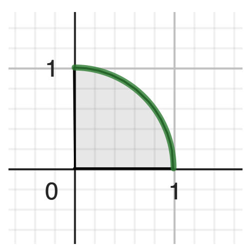


Par l'application h, le rectangle $S = [r,r'] \times [\theta,\theta']$ est transformé en un morceau de couronne situé dans le secteur angulaire délimité par les rayons r et r' et d'angle $\Delta\theta = \theta' - \theta$. On pose $\Delta r = r' - r$.
On remarquera alors que l'aire du rectangle est égale à $\Delta r \times \Delta\theta$ et que celle de son image est

$$\frac{1}{2}(r'^2 - r^2)\Delta\theta = \frac{1}{2}(r' + r)\Delta r\Delta\theta$$

Lorsque r' est très proche de r, $\frac{1}{2}(r'+r) \sim r$, par suite l'aire se retrouve multipliée par r, ainsi on a $dA = rdrd\theta$.

5.0.19 EXEMPLE. On reprend l'intégrale $I = \iint_D (1 - x^2 - y^2)dxdy$ où $D = \{(x,y) \,|\, x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } x \geq 0, y \geq 0\}$.



En coordonnées polaires $D = \{(r,\theta) \,|\, 0 \leq r \leq 1 \text{ et } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\} = [0,1] \times [0, \frac{\pi}{2}]$, l'intégrand $(1 - (x^2 + y^2))dA = (1 - r^2)rdrd\theta$ d'où

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (1-r^2)rdrd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \times \int_0^1 (r - r^3)dr = \frac{\pi}{2} \times \left[\frac{r}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2} \times (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) = \frac{\pi}{8}.$$

5.1 Applications

Plusieurs quantités physiques peuvent être exprimées comme des intégrales multiples. De tels expressions sont fondées sur la définition de l'intégrale comme la limite d'une somme.

1) La masse d'un solide (plat)

On a vu par exemple que si D est un domaine borné du plan, alors

Aire $(D) = \iint_D dxdy$.

Plus généralement, si D a une densité de masse (par unité d'aire) ρ, alors $\Delta_m = \rho\Delta A$, par suite la **masse totale** de D est donnée par l'intégrale

$M(D) = \iint_D dm = \iint_D \rho(x,y)dxdy$.

5.1.1 EXEMPLE. De la farine est éparpillée sur le sol selon une densité $\rho(x,y) = \dfrac{1}{(\sqrt{x^2+y^2}+1)^2}$, où $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Déterminer la quantité totale de farine éparpillée sur un disque D de rayon $R > 0$ centré en l'origine.

Réponse: En coordonnées polaires, on a

$\rho(r,\theta) = \frac{1}{(r+1)^2}$ et $D = \{(r,\theta) |\ r \in [0,\ R], \theta \in [0, 2\pi[\}$. Ainsi:

la quantité totale de farine = la masse totale $M(D)$

$$= \iint_D \frac{1}{(r+1)^2}\, rdrd\theta = \iint_D \frac{r}{(r+1)^2}\, drd\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^R \left(\frac{r+1}{(r+1)^2} - \frac{1}{(r+1)^2}\right) dr$$

$$= 2\pi \int_0^R \left(\frac{1}{r+1} - \frac{1}{(r+1)^2}\right) d\,r = 2\pi \left[\ln(r+1) + \frac{1}{r+1}\right]_0^R = 2\pi \left(\ln(R+1) + \frac{1}{R+1} - 1\right)$$
$$= 2\pi \left(\ln(R+1) - \frac{R}{R+1}\right).$$

5.1.2 REMARQUE

Comme une masse est positive, on obtient du calcul précédent, l'inégalité:

$$\ln(t+1) \geq \frac{t}{t+1}, \text{ pour tout } t \geq 0.$$