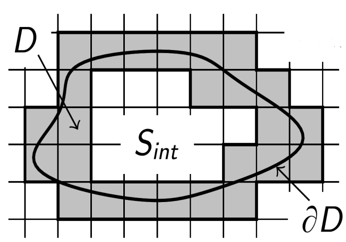
Chapter 5

Intégrales doubles

Soit D un domaine compact de $\mathbb{R}^2$ à bord ∂D, qui est une courbe C paramétrée par des applications injectives de dérivée continue (ou une réunion finie de telles courbes.)

On appellera un tel domaine, un domaine régulier (ou à bord régulier). Le problème de la restriction (à ce type de domaine), ne se posait pas pour la dimension 1 puisqu'on y intégré des fonctions définies sur des intervalles.
Soit $f(x, y)$ une fonction à deux variables sur un domaine régulier D. Supposons que f soit continue sur D (avec son bord $\partial D = C$).
On va maintenant définir l'intégrale de f sur le domaine D, on va procéder comme en dimension 1, par "découpage et échantillonnage".
Comme D est borné on peut l'inclure dans un rectangle $R = [a, b] \times [c, d]$. Maintenant, pour tout n entier ≥ 1, on divise R en petits rectangles R_{ij} de taille $\frac{b-a}{n} \times \frac{d-c}{n}$ parallèles aux axes Ox et Oy et on ne considère que les rectangles $R_{i,j}$ contenus dans D (sur la figure S_{int} est l'ensemble des rectangles contenus dans D)



Notons $M_{i,j}$ un point de $R_{i,j}$. Considérons la somme Riemann (double) (sur les indices (i, j) tels que R_{ij} soit contenu dans D)

$$S_n(f) = \frac{(b-a)(d-c)}{n^2} \sum_{R_{ij} \subset D} f(M_{i,j}).$$

Notons que $\frac{(b-a)(d-c)}{n^2}$ est l'aire du rectangle $R_{i,j}$.

5.0.1 Définition

On dit qu'une fonction est intégrable si $\lim_{n\to+\infty} S_n$ existe.

On appelle l'intégrale double de la fonction f sur le domaine D cette limite, et on la note

$$\iint_D f(x,y)dxdy.$$

Nous admettrons la résultat suivant :

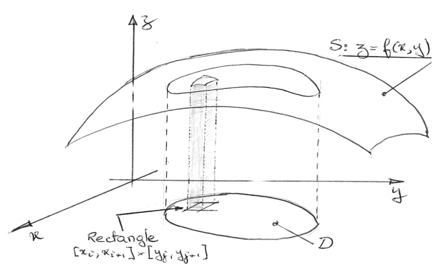
5.0.2 Théorème

Toute fonction continue $f : D \to \mathbb{R}$ sur un domaine compact D est intégrable.

5.0.3 Remarque

Cette définition est valable pour une fonction différentiable sur ce domaine, puisqu'elle est alors continue.

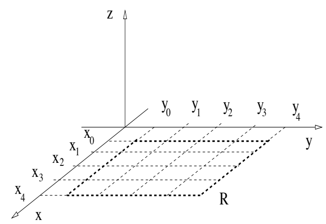
Interprétation géométrique: Supposons que la fonction f soit positive. Notons $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = f(x,y) \text{ et } (x,y) \in D\}$ le graphe de f au-dessus de D. Cette surface et les parallèles à Oz menées par les points du bord ∂D limitent un domaine Ω dans $\mathbb{R}^3$. L'intégrale I est le volume de ce domaine. En effet, le volume limité dans Ω par le rectangle $R_{i,j}$ et les plans parallèles à Oz qui s'appuient sur son périmètre à pour valeur approchée $f(M_{i,j})\dfrac{(b-a)(d-c)}{n^2}$. La somme $\dfrac{(b-a)(d-c)}{n^2}\displaystyle\sum_{R_{ij}\subset D} f(M_{i,j})$ représente une valeur approchée du volume de Ω.
La limite I est le volume exacte de Ω.



Le cas où D **est un rectangle:** Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction **continue** sur le rectangle $D = R = [a,\ b] \times [c,d]$. Dans ce cas utilise tous le rectangles du découpage c-à-d tous les indices (i,j), donc $0 \le i \le n$ et $0 \le j \le n$.
D'après ce qui précède, l'intégrale de f (au sens de Riemann) est la limite des $S_n(f)$:

$$\iint_D f(x,y)dxdx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(M_{i,j})\Delta x \Delta y$$

où $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $\Delta y = \frac{d-c}{n}$,
$x_i = a + i\Delta x$ $(0 \leq i \leq n)$,
$y_j = c + j\Delta y$ $(0 \leq j \leq n)$
$M_{i,j} = (x_i, y_j)$



d'où

$$\iint_D f(x,\ y)dxdy = \lim_{n\to+\infty} \frac{(b-a)(d-c)}{n^2} \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}} f\left(a + i\frac{b-a}{n},\ c + j\frac{d-c}{n}\right)$$

5.0.4 EXEMPLE. En utilisant la définition, on va calculer $\iint_{[0,1]\times[0,1]} (2x+y)dxdy$.

Dansce cas, on a $R = [0,1]\times[0,1]$, $a = c = 0$, $b = d = 1$, $f(x,y) = 2x+y$, alors

$$S_n = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{2i}{n} + \frac{j}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(2\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{j=1}^{n} j\right) = \frac{1}{n^2}\left(n(n+1) + \frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{3}{2}\frac{n+1}{n}.$$

Ainsi $\iint_D f(x,\ y)dxdy = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{2}\frac{n+1}{n} = \frac{3}{2}$.

5.0.5 REMARQUE

On a utiliser pour faire les calculs, le fait suivant: pour tout entier naturel m on a

$$\boxed{\sum_{k=1}^{m} k = \frac{m(m+1)}{2}}$$

5.0.1 Propriétés des intégrales doubles:

Soient D un domaine (fermé et borné) de $\mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues alors:

1. $\iint_D cf(x,y)dxdy = c\iint_D f(x,y)dxdy$ pour tout réel c.
2. $\iint_D (f(x,y) + g(x,y))\,dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy + \iint_D g(x,y)dxdy$
3. Si $D = D_1 \cup D_2$ et l'aire de $D_1 \cap D_2$ est nulle, alors
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy$$
4. Si $f(x,y) \geq g(x,y)$ pour tout $(x,y) \in D$ alors $\iint_D f(x,y)dxdy \geq \iint_D g(x,y)dxdy$.
   En particulier, si $f(x,y) \geq 0$ pour tout $(x,y) \in D$ alors $\iint_D f(x,y)dxdy \geq 0$.
5. $\left|\iint_D f(x,y)dxdy\right| \leq \iint_D |f(x,y)|\,dxdy$.

6. **Calcul d'aire:** L'aire de D est l'intégrale double sur D de la fonction constante égale à 1

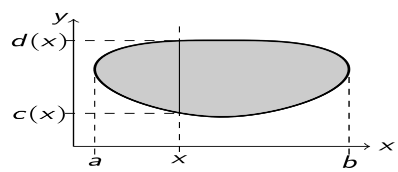
$$\boxed{\text{Aire de } D = \iint_D dxdy}$$

5.0.6 DÉFINITION

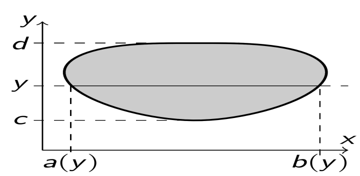
Un **domaine élémentaire** D est un domaine du plan de l'une des formes suivantes:

1. $R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; a \leq x \leq b \text{ et } c \leq y \leq d\}$, dans ce cas on dit aussi que c'est un rectangle de $\mathbb{R}^2$

2. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; a \leq x \leq b \text{ et } c(x) \leq y \leq d(x)\}$ où les fonctions c et d sont continues. On dira que D est un domaine **type I** (ou domaine en piles).



3. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; c \leq y \leq d \text{ et } a(y) \leq x \leq b(y)\}$ où les fonction $a : [c, d] \to \mathbb{R}$ et $b : [c, d] \to \mathbb{R}$ sont continues. On dira que D est un domaine **type II** (ou domaine en tranches).



5.0.7 REMARQUE

Un rectangle est un domaine qui est à la fois de type I et de type II

5.0.2 Calcul d'intégrales doubles à l'aide d'intégrales simples

5.0.8 THÉORÈME (THÉORÈME DE FUBINI SUR UN RECTANGLE)

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $D = [a, b] \times [c, d]$ un rectangle. Alors

$$\boxed{\iint_D f(x, y)\, dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy}$$

5.0.9 COROLLAIRE

En particulier si $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$ (variables séparées) on a:

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f_1(x)f_2(y)\, dxdy = \int_a^b f_1(x)dx \int_c^d f_2(y)dy$$

5.0.10 EXEMPLE.

1)

$$\iint_{[0,1]\times[0,\pi/2]} x\cos y\, dxdy = \int_0^1 x\, dx \int_0^{\pi/2} \cos y\, dy$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 [\sin y]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}$$

2)

$$\iint_{[0,2]\times[0,1]} \frac{1+x^2}{1+y^2}\, dxdy = \int_0^2 (1+x^2)dx \int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\, dy$$

$$= \left[x + \frac{x^3}{3}\right]_0^2 [\arctan(y)]_0^1 = (2+\frac{8}{3})(\frac{\pi}{4}) = \frac{7\pi}{6}.$$

3) $\displaystyle\iint_{[-1,1]\times[0,1]} (x^2y-1)\, dxdy = \int_{-1}^1 (\int_0^1 x^2y - 1\, dy)dx$

$$= \int_{-1}^1 [\frac{1}{2}x^2y^2 - y]_0^1\, dx = \int_{-1}^1 (\frac{1}{2}x^2 - 1)dx = [\frac{1}{6}x^3 - x]_{-1}^1 = -\frac{5}{3}$$

5.0.11 REMARQUE

On aurait pu opérer de cette manière:

$\displaystyle\iint_{[-1,1]\times[0,1]} (x^2y-1)\, dxdy = \iint_{[-1,1]\times[0,1]} x^2ydxdy - \iint_{[-1,1]\times[0,1]} dxdy$

$\displaystyle= \int_{-1}^1 x^2dx \int_0^1 ydy - \text{Aire}([-1,1]\times[0,1]) = [\frac{x^3}{3}]_{-1}^1 \times [\frac{y^2}{2}]_0^1 - 2 = \frac{2}{3}\times\frac{1}{2} - 2 =$
$\displaystyle\frac{2}{6} - 2 = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3}$

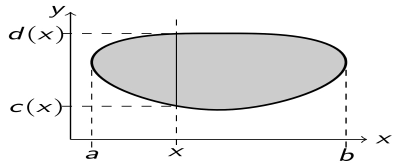
5.0.12 THÉORÈME (THÉORÈME DE FUBINI SUR UN DOMAINE DE TYPE I (OU INTÉGRATION EN "PILES"))

Soit D un domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par

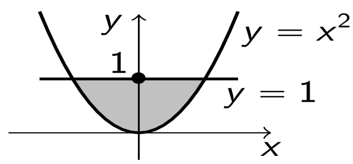
$$D = \left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,\, b] \text{ et } c(x) \leq y \leq d(x)\right\}$$

où c et d sont deux fonctions continues sur $[a,\, b]$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue, alors

$$\boxed{\iint_D f(x,\, y)\, dxdy = \int_{\mathrm{a}}^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,\, y)dy\right) dx}$$



5.0.13 EXEMPLE. Soit à calculer l'aire de D la partie bornée de $\mathbb{R}^2$ délimitée par la parabole d'équation, $y = x^2$ et la droite $y = 1$.



On peut représenter D par $D = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in [-1,\ 1],\ x^2 \leq y \leq 1]\}$, c'est un domaine de type I.

Par conséquent: $\displaystyle\iint_D dxdy \ = \int_{-1}^{1}(\int_{x^2}^{1} dy)dx$

$$= \int_{-1}^{1}[y]_{x^2}^{1}dx = \int_{-1}^{1}(1-x^2)dx$$

$$= [x - \frac{1}{3}x^3]_{-1}^{1} = (1-\frac{1}{3}) - (-1+\frac{1}{3}) = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

5.0.14 EXEMPLE. Calculer l'intégrale $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)dxdy$ où D est le triangle de sommets $(0,1)$, $(0,-1)$ et $(1,0)$.
Pour cela on décrit D comme un domaine de type I:
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 1,\ x-1 \leq y \leq 1-x\}$ on aura

$$\iint_D (x^2+y^2)dxdy = \int_0^1 \left(\int_{x-1}^{1-x}(x^2+y^2)dy\right)dx = \int_0^1 [x^2y + \frac{y^3}{3}]_{x-1}^{1-x}dx = 2\int_0^1 (x^2(1-x) + \frac{(1-x)^3}{3})dx$$

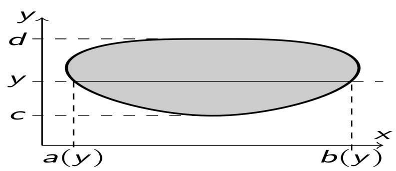
$$= 2[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{(1-x)^4}{12}]_0^1 = 2((\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - 0) - (0 - 0 - \frac{1}{12})) = 2(\frac{4-3+1}{12}) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

5.0.15 THÉORÈME (THÉORÈME DE FUBINI SUR UN DOMAINE DE TYPE II (OU INTÉGRATION EN "TRANCHES"))
Soit D un domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par

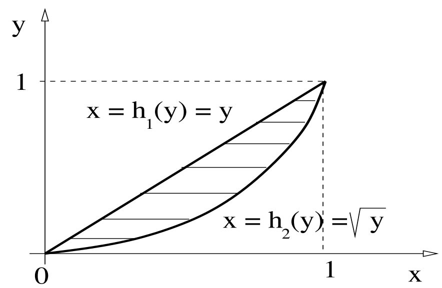
$$D = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 |\, y \in [c,\ d] \text{ et } a(y) \leq x \leq b(y)\}$$

où a et b sont deux fonctions continues sur $[c,\ d]$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue, alors

$$\boxed{\iint_D f(x,\ y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,\ y)dx\right)dy}$$



5.0.16 EXEMPLE. Soit à calculer $\iint_D (x^2+y^2)dxdy$ où $D = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \in [0,\ 1],\ y \leq x \leq \sqrt{y}\}$, c'est un domaine de type II.



On a alors

$$\iint_D (x^2+y^2)dxdy = \int_0^1 \left(\int_y^{\sqrt{y}} (x^2+y^2)dx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + xy^2 \right]_y^{\sqrt{y}} dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{3} y^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3} y^3 - y^3 \right) dy$$

$$= \left[\frac{1}{3} \times \frac{2}{5} y^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{7} y^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} y^4 - \frac{1}{4} y^4 \right]_0^1 = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{7} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{15} + \frac{2}{7} - \frac{1}{12} - \frac{1}{4} = \frac{9}{3 \times 5 \times 7} = \frac{3}{35}.$$