Part II

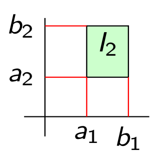
Intégrales multiples

1. Rappels sur l'intégrale de fonctions d'une variable réelle (Intégrale de Riemann)
2. Intégrales doubles
3. Intégrales triples
4. Applications: Calculs d'aire, de volume, moyenne, centre de gravité et moment d'inertie

3.1 Une introduction à la mesure

3.1.1 Mesure des figures canoniques

- Si $l_1 = [a_1,\ b_1]$ (un segment), avec $-\infty < a_1 \leq b_1 < \infty$, alors sa longueur $\lambda_1(l_1) = b_1 - a_1$.
- Si $I_2 = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ (un rectangle)



alors son aire $\lambda_2(l_2) = (b_1 - a_1) \times (b_2 - a_2)$.

- Plus généralement, si d est un entier ≥ 3 et

$$l_d = \prod_{i=1}^{d} [a_i,\ b_i] = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]$$

avec $a_i \leq b_i$ pour tout i (un parallélépipède en dimension d),

- alors son volume (en dimension d) est égal à:

$$\lambda_d(l_d) := \prod_{i=1}^{d} (b_j - a_j) = (b_1 - a_1) \times \cdots \times (b_d - a_d).$$

Remarques

- les points ont une longueur nulle:
- en effet $\{a_1\} = [a_1, a_1]$, par suite $\lambda_1(\{a_1\}) = a_1 - a_1 = 0$
- Par conséquent : $\lambda_1([a, b[) = \lambda_1(]a, b[) = \lambda_1(]a, b]) = \lambda_1([a, b]) = b - a$.
- tout segment de droite a une aire nulle car

$$\lambda_2(\{a_1\} \times [a_2, b_2]) = 0 \times (b_2 - a_2) = 0.$$

- Plus généralement, les parallélépipèdes (ou pavés droits) de $\mathbb{R}^{d-1}$ ont un volume nul pour la mesure de $\mathbb{R}^d$.

- Une **figure élémentaire** J est une réunion finie de parallélépipèdes canoniques disjoints $J_1, J_2, \ldots, J_n$ de $\mathbb{R}^d$.
  (ou les intersections sont de dimension $\leq d-1$)

- Additivité disjointe :

$$J = \bigsqcup_{i=1}^{n} J_i \Rightarrow \lambda_d(J) = \lambda_d(J_1) + \cdots + \lambda_d(J_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_d(J_i) \ .$$

  Le symbole $\bigsqcup$ désigne une réunion disjointe c-à-d une union d'ensembles deux à deux disjoints.

- Invariance par translations :

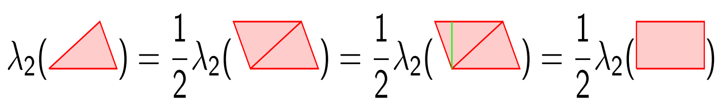
$$\text{pour tout vecteur } v \in \mathbb{R}^d, \quad \lambda_d(J + v) = \lambda_d(J).$$

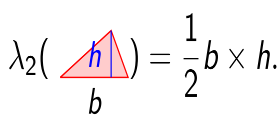
- Plus génétalement : Invariance par isométrie: Soit $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une isométrie (application qui préserve les distances) alors

$$\lambda_d(h(J)) = \lambda_d(J) \ .$$

- Utiliser les règles précédentes pour se ramener à des figures élémentaires.

- Exemple: le calcul de l'aire d'un triangle de base b et de hauteur h





3.1.2 Le problème de la mesure

- Pour des figures encore plus compliquées, la règle d'additivité doit être étendue en additivité dénombrable disjointe (ou σ-additivité):

$$J = \sqcup_{n=1}^{\infty} J_n \Rightarrow \lambda_d(J) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_d(J_n) \ .$$

- Idée : approcher une figure arbitraire par des réunions dénombrables de figures plus simples dont on sait calculer le volume.

- Exemple: le calcul du périmètre et l'aire d'un disque à l'aide de polygones réguliers.

  Le problème suivant concerne le lien entre découpage et mesure (de l'aire ou du volume).

- On appelle **isométrie** est une transformation qui conserve les longueurs (les aires, les volumes). Par exemples, les translations, les rotations et les symétries sont des isométries.

3.1.1 Définition

- Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}^d$. On dit qu'elles sont équivalentes par découpage et recollement (ou équivalentes par puzzle) s'il existe une partition finie de A (resp. de B),

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \text{ (resp. } B = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n)$$

et, pour chaque $i = 1, 2, \ldots, n$, une isométrie g_i telle que

$$g_i(A_i) = B_i$$

Autrement dit, on a découpé A en n morceaux $A_1, \ldots, A_n$, on a déplacé ces morceaux et on les a recollé pour reconstituer B, le tout, bien entendu, sans perte ni chevauchement

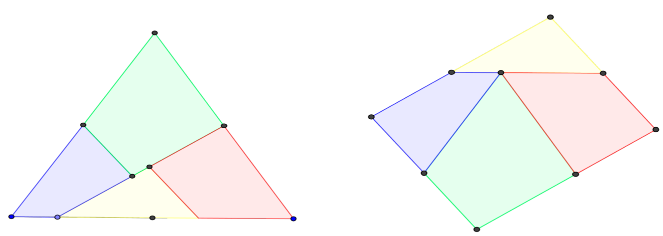


Figure 3.1: *

A B

Question: Il est facile de voir que deux parties équivalentes par découpage et recollement ont même aire (dans le plan) ou même volume (dans l'espace). La question qui se pose est celle de la réciproque : si deux parties du plan ont même aire, peut-on passer de l'une à l'autre par découpage et recollement ? (Ou encore : existe-t-il un puzzle passant de l'une à l'autre ?)

La question est identique pour deux parties de même volume dans l'espace.

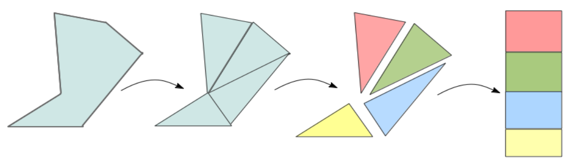
Les réponses sont différentes entre le plan et l'espace.

Deux parties du plan, de même aire, sont équivalentes par découpage et recollement:

3.1.2 Théorème

Théorème[Bolyai, 1832, Gerwien, 1833)] Soient A et B deux polygones du plan qui ont une même aire.
Alors A et B sont équivalents par découpage et recollement.

Idée de la preuve: On découpe A en triangles $T_1, T_2, \ldots, T_n$. On montre ensuite que chaque triangle T_i est équivalent à un rectangle R_i de même aire et dont un côté est de longueur 1. On obtient alors un rectangle R équivalent à A en mettant bout à bout tous les R_i. On fait de même pour montrer que B est équivalent à R.



- Le résultat est faux dans l'espace. On montre que le cube unité n'est pas équivalent par découpage et recollement au tétraèdre régulier (de volume 1).

  Le problème de la mesure:
  Existe-t-il une application non-nulle $m : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \to [0, +\infty]$, où $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ désigne l'ensemble des parties de $\mathbb{R}^d$, telle que:

  1. $m(\emptyset) = 0$, où $\emptyset$ est l'ensemble vide
  2. $m(\bigsqcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{J}_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} m(\mathrm{J}_n)$, où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, J_n est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$
  3. m est invariante par isométrie
  4. $m([0, 1]^d) = 1$

- une telle application est appelée mesure universelle (elle permet de mesurer toute partie de $\mathbb{R}^d$)
- Question: existe-t-il dans l'espace $\mathbb{R}^3$ une mesure universelle (définie pour toutes les parties bornées), non nulle, simplement additive et invariante par isométries ?
- La réponse est non et cela est une conséquence de ce qu'on appelle le paradoxe de Banach-Tarski:

3.1.3 Théorème (Banach-Tarski, (1924))

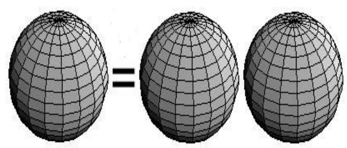
Soient A et B deux parties bornées d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^3$. Alors, il existe des partitions finies de

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \text{ et } B = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n$$

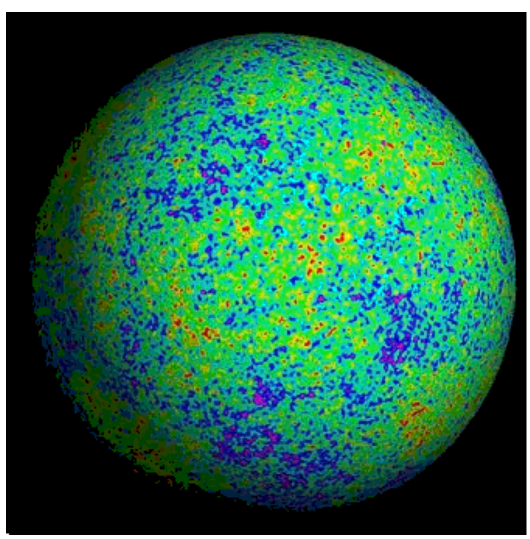
et pour chaque $i = 1, 2, \ldots, n$, une isométrie g_i telle que

$$g_i(A_i) = B_i$$

- Autrement dit, on peut découper A en un nombre fini de morceaux (certainement pas simples !), les déplacer, et reconstituer B avec ces morceaux (un puzzle).
- On pensera par exemple au cas suivant : A est une pomme et B est la lune.
- On montre même que pour passer d'une boule de rayon donnée à deux boules disjointes de même rayon, il suffit d'un découpage en 5 morceaux. On peut par exemple dédoubler la terre en la découpant en 5 parties puis en les rassemblant.



- Il y a certainement dans cette partition des morceaux qu'on ne peut pas mesurer, sinon le volume de la terre serait égal à son double ce qui donne $1 = 2$ et cela est absurde.
- à noter que ces découpages ne sont pas réguliers; un tel découpage ressemblerait un peu à ceci (les éléments d'une même couleur forment une piece du Puzzle)

- 

Chapter 4

Rappels sur l'intégrale de Riemann

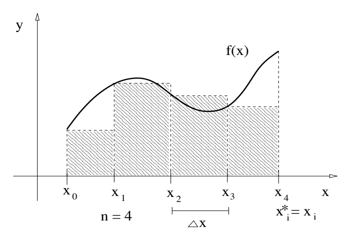
4.0.1 DÉFINITION (DÉFINITION DE L'INTÉGRALE)

- Soit $f : [a,\ b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

  On appelle somme de Riemann associée à f, n et x_i^*, la somme

- $$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)$$

  où $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + i\Delta x$ et x_i^* est un point quelconque de $[x_{i-1}, x_i]$

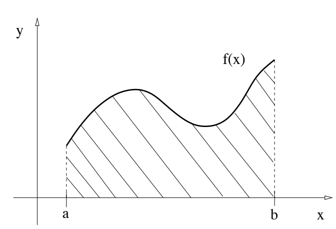


4.0.2 THÉORÈME

Si f est continue, alors la suite (S_n) converge. On appelle intégrale (au sens de Riemann) de f sur $[a, b]$, la limite de cette suite, et on note

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

L'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire du domaine délimité par le graphe de f et l'axe des abscisses.



4.0.3 Remarque

Cette définition est valable aussi pour les fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ c'est-à-dire les fonctions continues sauf en un nombre fini de points où elle admettent des limites à droite et à gauche.

Ce qui suit donne la définition (générale) des fonctions intégrable au sens de Riemann, qui inclus un plus grand nombre de fonctions, par exemple les fonctions monotones sur $[a, b]$.

- En utilisant la définition, on va calculer $\int_0^1 x dx$
- Dans ce cas, on a:

  $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = x$, $\Delta x = \frac{1}{n}$ et on prend $x_i^* = x_i = \frac{i}{n}$ alors
- $$S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n^2}\times\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2n^2}$$
- D'où, $\int_0^1 x dx = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$.

4.0.4 Remarque

- On a utiliser le résultat suivant: pour tout entier naturel m on a

$$\boxed{\sum_{k=1}^{m} k := 1 + 2 + \cdots m = \frac{m(m+1)}{2}} \qquad \text{à démontrer en exercice !}$$

Plus généralement

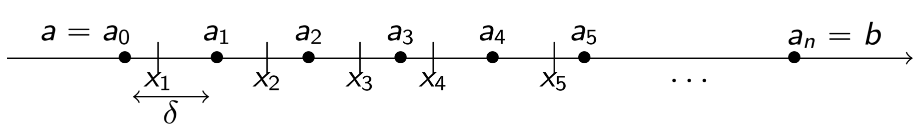
4.0.5 Définition

On appelle **subdivision** d'un intervalle réel $[a,\ b]$ toute famille finie $\sigma = (a_i)_{0\leq i\leq n}$ d'éléments du segment $[a,\ b]$ telle que :

$$a = a_0 < a_1 < \ldots\ < a_n = b$$

On appelle **pas** (ou diamètre) de la subdivision σ le réel positif

$$\delta = \max_{1\leq i\leq n}(a_i - a_{i-1})$$

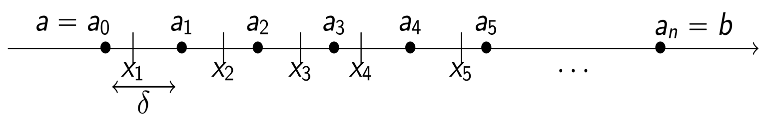


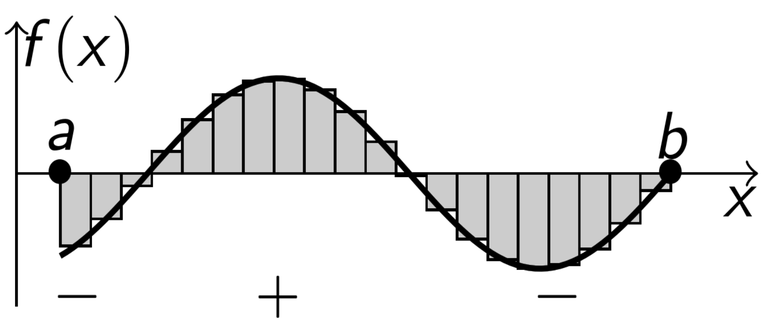
4.0.6 DÉFINITION

Définition des sommes de Riemann

- Soit $f : [\mathrm{a},\ b] \to \mathbb{R}$ une fonction d'une variable, $\sigma = (a_i)_{0 \le i \le n}$ une subdivision de $[a, b]$ et des points $x_1, \ldots, x_n$ tels que $x_i \in [a_{i-1},\ a_i]$:
- La somme de Riemann de f associée à la subdivision σ et aux points $x_1, \ldots, x_n$ est la somme (finie)

$$\boxed{S(f, \delta, x_i) := \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(a_i - a_{i-1})}$$





4.0.7 DÉFINITION

Soit $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$. On dit que f est intégrable (au sens de Riemann) si

$$\lim_{\substack{\delta \to 0 \\ n \to +\infty}} S(f, \sigma, x_i)$$

existe, est finie et ne dépend pas du choix des x_i. Dans ce cas

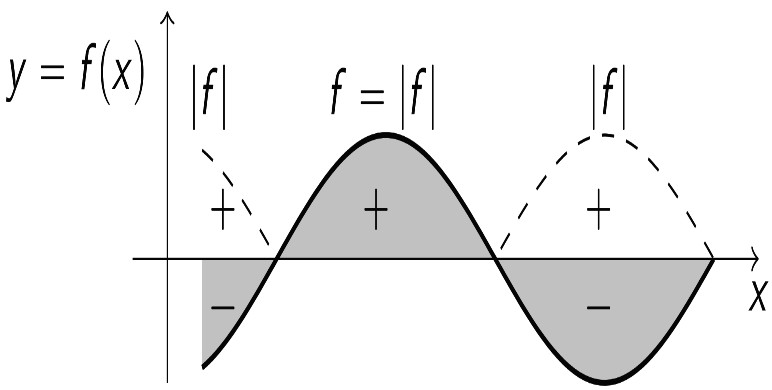
$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx := \lim_{\substack{\delta \to 0 \\ n \to +\infty}} S(f, \sigma, x_i)}$$

4.0.8 THÉORÈME

Les fonctions continues par morceaux, en particulier les fonctions continues, sont des fonctions intégrables. Les fonctions monotones sont des fonctions intégrables.

- $$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \text{ Aire algébrique}}$$

- $$\boxed{\int_a^b |f(x)|\,dx = \text{ Aire géométrique}}$$



4.0.1 1) Rappels sur l'intégrale de Riemann: Techniques d'intégrations

1. Une **primitive** de f sur $[a,\, b]$ est une fonction F dérivable telle

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

2. pour calculer une intégrable il suffit de connaître une primitive

4.0.9 THÉORÈME (FONDAMENTAL DU CALCUL INTÉGRAL)
Si F est une **primitive** de f sur $[a,\, b]$ alors

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

- "Lu à l'envers", un tableau de dérivées est un tableau de primitives (à une constante près) .

- Le calcul d'une primitive consiste souvent après quelques transformations à "reconnaître" une des fonctions du tableau :

Définie sur I	f	$F(x)=\int f(x)dx$
$\mathbb{R}-\{0\}$ ou $\mathbb{R}^+-\{0\}$	x^α, $(\alpha<0$ et $\alpha\neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^+-\{0\}$	x^α, $(\alpha\geq 0)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\mathbb{R}-\{0\}$	$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert)$
$\mathbb{R}-\{-a\}$	$\frac{1}{x+a}$	$\ln(\lvert x+a\rvert)$
$\mathbb{R}$	e^{ax}, $(a\neq 0)$	$\frac{e^{ax}}{a}$

Définie sur I	f	$F(x)=\int f(x)dx$
$\mathbb{R}$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\mathbb{R}$	$\sin(ax+b)$, $(a\neq 0)$	$-\frac{\cos(ax+b)}{a}$
$\mathbb{R}$	$\cos(ax+b)$, $(a\neq 0)$	$\frac{\sin(ax+b)}{a}$
$\mathbb{R}-\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$	$\tan(x)$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert)$
$\mathbb{R}-\{k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$	$\text{cotan}(x)$	$\ln(\lvert\sin(x)\rvert)$

Définie sur I	f	$F(x)=\int f(x)dx$
$\mathbb{R}-\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$	$\frac{1}{\cos^2(x)}=1+\tan^2(x)$	$\tan(x)$
$\mathbb{R}-\{k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$	$\frac{1}{\sin^2(x)}=1+\text{cotan}^2(x)$	$-\text{cotan}(x)$
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$
$]-1,1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$
$]-1,1[$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$

f	$F(x)=\int f(x)dx$
$\frac{u'}{u^m}$, $m\neq 1$	$\frac{-1}{(m-1)u^{m-1}}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$u'\cos u$	$\sin u$
$u'\sin u$	$-\cos u$

Intégration par parties

Soient f et g deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle I, De la règle de dérivation d'un produit

$$(fg)' = f'g + fg' \iff fg' = (fg)' - f'g$$

En intégrant, de part et d'autres de cette égalité, on obtient
$\displaystyle\int f(x)g'(x)dx = \int (f(x)g(x))'dx - \int f'(x)g(x)dx$
nous déduisons la formule d'intégration par parties

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx}$$

on a aussi $\boxed{\displaystyle\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx}$

4.0.10 EXEMPLE. Example

Soit à calculer $\displaystyle\int \ln(x)\, dx$.

En posant $\begin{cases} f(x) = \ln(x) & \Longrightarrow\ f'(x) = \dfrac{1}{x} \\ g'(x) = 1 & \Longrightarrow\ g(x) = x \end{cases}$

on obtient $\displaystyle\int \ln(x)\, dx = x\ln(x) - \int dx = x\ln(x) - x + C$
où C est une constante.

4.0.11 EXEMPLE. Exemple d'intégration par parties successives

Soit à calculer $\displaystyle\int \sin(x)e^x\, dx$.

En posant $\begin{cases} f(x) = \sin(x) & \Longrightarrow\ f'(x) = \cos(x) \\ g'(x) = e^x & \Longrightarrow\ g(x) = e^x \end{cases}$

on obtient $\int \sin(x)e^x\, dx = \sin(x)e^x - \int \cos(x)e^x\, dx$.
Ce n'est pas fini: on est ramener à calculer une primitive de $\cos(x)e^x$, on utilise une intégration par parties.

En posant $\begin{cases} u(x) = \cos(x) & \Longrightarrow\ u'(x) = -\sin(x) \\ v'(x) = e^x & \Longrightarrow\ v(x) = e^x \end{cases}$

4.0.12 EXEMPLE. on obtient $\int \cos(x)e^x\, dx = \cos(x)e^x + \int \sin(x)e^x\, dx$.

Ainsi, $\int \sin(x)e^x\, dx = \sin(x)e^x - \cos(x)e^x - \int \sin(x)e^x\, dx$,

par suite $2\int \sin(x)e^x\, dx = \sin(x)e^x - \cos(x)e^x$ d'où

$\boxed{\int \sin(x)e^x\, dx = \frac{\sin(x)e^x - \cos(x)e^x}{2} = \frac{e^x(\sin(x) - \cos(x))}{2}}.$

4.0.13 EXEMPLE. Exemples

- Calculer $\int_0^{\pi} t\sin(t)\,dt$

- Faisons une intégration par parties en posant $u = t$ et $v' = \sin t$, d'où $u' = 1$ et $v = -\cos t$. Ainsi,

$$\int_0^{\pi} t\sin t dt = [-t\cos t]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos t dt = -\pi\cos(\pi) + [\sin t]_0^{\pi} = -\pi\cos(\pi) = \pi.$$

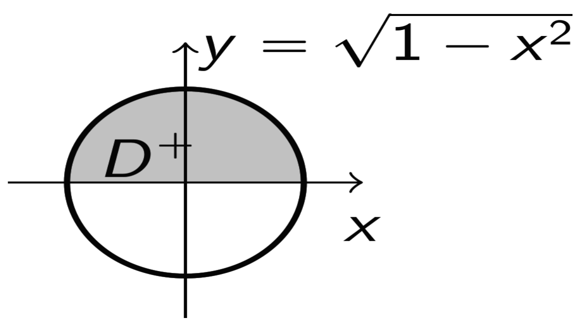
1) Changement de variable

- (Intégration par changement de variables) $x = u(t)$ alors $\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(u(t))u'(t)dt}$ où $u : [c,d] \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 telle que $u(c) = a$ et $u(d) = b$.

4.0.14 REMARQUE

- La méthode d'intégration par changement de variable n'a d'autre but que de remplacer une intégrale compliquée par une intégrale plus simple.
- La difficulté majeure consiste à trouver le changement de variable qui convient. Il faut essayer de choisir u égal à une certaine fonction qui apparait sous le signe d'intégration et dont la dérivée s'y trouve aussi à un facteur constant près.

4.0.15 EXEMPLE. Calcul de l'aire du disque unité.



Aire du demi-disque D^+ est égale à l'intégrale de la fonction $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ sur l'intervalle $[-1,1]$.

- Aire $(D) = 2$Aire $(D^+) = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx$

- On va utiliser pour cela le changement de variable: $x = \sin t$ pour $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

- AIors $dx = \cos t\, dt$ et puisque $\sqrt{1-x^2} = \cos t$ on aura

  Aire $(D) = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\; dt = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(2t)+1}{2} dt$

  $$= [\frac{1}{2}\sin(2t) + t]_{-\pi/2}^{\pi/2} = (0 + \frac{\pi}{2} - 0 + \frac{\pi}{2}) = \pi.$$