Chapter 3

Extrema liés (ou sous contraintes). Multiplicateurs de Lagrange

3.0.1 Une seule contrainte

Soit $n \geq 1$ un entier. On notera $X = (x_1, \ldots, x_n)$ un point de $\mathbb{R}^n$.

Il s'agit de trouver les extrema de $f(X)$ lorsque X appartient à une hypersurface S définie par $g(X) = 0$ i.e. $S = \{X \in \mathbb{R}^n \mid g(X) = 0\}$.

3.0.1 DÉFINITION

Un point X_0 *est un minimum* (*resp. maximum*) local pour f, lié à la contrainte $g(X) = 0$ (i.e. sur S) si:

(i) $g(X_0) = 0$

(ii) Il existe $r > 0$ tel que $f(X_0) \leq f(X) (resp. f(X_0) \geq f(X))$ pour tout $X \in S \cap B(X_0, r)$.

3.0.2 THÉORÈME (DE LAGRANGE)

Soit $f(X)$ et $g(X)$ de classe C^1 sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Soit X_0 un point de S tel que:

(a) $\nabla g(X_0) \neq \mathbf{0}$ (i.e. X_0 n'est pas un point critique de g)

(b) f admet un *extremum local* en X_0 sur S

Alors il existe un nombre réel λ tel que:

$$\nabla f(X_0) = \lambda \nabla g(X_0).$$

Le nombre réel λ est appelé multiplicateur de Lagrange.

Démonstration: On va démontrer le théorème pour la dimension $n = 3$. La démonstration dans le cas général, se fait suivant le même schema.
Soit $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$ vérifiant les conditions (a) et (b).
D'après (a), on peut appliquer le théorème des fonctions implicites.
En effet, $\nabla g(X_0) \neq (0,0,0)$, entraîne que l'une des composantes de $\nabla g(X_0)$ est non nulle; on va supposer sans perdre de généralité que $\frac{\partial g}{\partial z}(X_0) \neq 0$.
Alors d'après le théorème des fonctions implicites, il existe une fonction φ définie dans un voisinage de (x_0, y_0), telle que $z = \varphi(x, y)$. On aura $(x, y, z) \in S \iff g(x, y, \varphi(x, y)) = 0$ au voisinage de X_0.
Comme la fonction $h(x, y) = f(x, y, \varphi(x, y))$ admet un extremum en (x_0, y_0), on a $\nabla h(x_0, y_0) = 0$, en utilisant la formule de dérivation des fonctions composées, on aura au point X_0

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(X_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0).\frac{\partial f}{\partial z}(X_0) = 0$$
$$\frac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(X_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0).\frac{\partial f}{\partial z}(X_0) = 0$$

De même les dérivées partielles de la relation $g(x, y, \varphi(x, y)) = 0$ donnent

$$\frac{\partial g}{\partial x}(X_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0).\frac{\partial g}{\partial z}(X_0) = 0$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}(X_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0).\frac{\partial g}{\partial z}(X_0) = 0$$

Comme $\frac{\partial g}{\partial z}(X_0) \neq 0$, on peut diviser par cette quantité pour obtenir

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(X_0)}{\frac{\partial g}{\partial z}(X_0)}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial y}(X_0)}{\frac{\partial g}{\partial z}(X_0)}.$$

D'où

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X_0) = \left(\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(X_0)}{\frac{\partial g}{\partial z}(X_0)}\right)\frac{\partial f}{\partial z}(X_0) = \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial z}(X_0)}{\frac{\partial g}{\partial z}(X_0)}\right)\frac{\partial g}{\partial x}(X_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(X_0) = \left(\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(X_0)}{\frac{\partial g}{\partial z}(X_0)}\right)\frac{\partial f}{\partial z}(X_0) = \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial z}(X_0)}{\frac{\partial g}{\partial z}(X_0)}\right)\frac{\partial g}{\partial y}(X_0)$$

et $\frac{\partial f}{\partial z}(X_0) = \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial z}(X_0)}{\frac{\partial g}{\partial z}(X_0)}\right)\frac{\partial g}{\partial z}(X_0)$.

Ainsi, on a bien $\nabla f(X_0) = \lambda \nabla g(X_0)$ avec $\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}(X_0)}{\frac{\partial g}{\partial z}(X_0)}$. $\square$

3.0.4 Remarque

Si P est un extremum lié, on a $\nabla f(P)$ parallèle à $\nabla g(P)$. La réciproque n'est pas vraie. Nous avons une condition nécessaire mais pas suffisante. C'est l'équivalent de la nullité de la dérivée pour les extrema libres : en un extremum libre la dérivée est nulle mais la dérivée peut être nulle sans que la fonction ait un extremum (penser à $x \mapsto x^3$ en $x = 0$).

3.0.5 Exemple. Déterminer les extrema de $f(x, y) = xy$ sur le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 8$.

Soit $g(x, y) = x^2 + y^2 - 8$. Alors, $\nabla f(x, y) = (y, x)$, $\nabla g(x, y) = (2x, 2y)$.

Pour déterminer les points critiques de $f(x, y)$ restreinte à la condition $g(x, y) = 4$, on doit résoudre le système:

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2\lambda x \\ x = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases}$$

On observera, que se système impose que les solutions (x, y) vérifient $x \neq 0$ et $y \neq 0$, ce qui entrîne $\lambda \neq 0$. La division membres à membre des deux premières équations donne $\frac{y}{x} = \frac{x}{y} \implies y^2 = x^2$. Comme $x^2 + y^2 = 4$, on aura $x^2 + x^2 = 8 \implies x^2 = 4 \implies x = \pm 2$ De même on trouve $y = \pm 2$. L'ensemble des points critiques de la restriction de f à $x^2 + y^2 + z^2 = 8$, est

$$\{(-2, -2), (-2, 2), (2, -2), (2, 2)\}.$$

Il ne reste plus qu'à comparer les valeurs de f en ces points:

(x, y)	$(-2, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, -2)$	$(2, 2)$
$f(x, y)$	4	-4	-4	4
nature du point	maximum global	minimum global	minimum global	maximum global

3.0.6 Exercice Maximiser $x^2y^2z^2$ lorsque $x^2+y^2+z^2=1$.

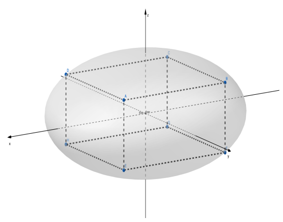
3.0.7 EXEMPLE. Sur l'exemple précédent on montre la méthode de résolution.

Déterminer le maximum de la distance de l'ellipsoide donné par $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}=1$ à l'origine.

3.0.8 EXEMPLE. On se propose de déterminer le parallélépipède ayant le plus grand volume, qu'on peut inscrire à l'intérieur de l'ellipsoïde d'équation

$$x^2+2y^2+9z^2=1,$$

dont les côtés a,b et c soient parallèles aux axes Ox, Oy et Oz respectivement.



On pose $a=2x$, $b=2y$ et $c=2z$ avec $(x,y,z)\in([0,+\infty[)^3$. On veut alors maximiser la fonction "volume" $f(x,y,z)=abc=(2x)(2y)(2z)=8xyz$ sur la partie de l'ellipsoïde $S=\{(x,y,z)\in([0,+\infty[)^3 \mid x^2+2y^2+9z^2=1\}$. On va utiliser pour cela la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

On va résoudre alors le système

$$\begin{cases}\nabla f(x,y,z))=(8yz,8xz,8xy)=\lambda\nabla g(x,y,z)=\lambda(2x,4y,19z)\\ x^2+2y^2+9z^2=1.\end{cases} \iff \begin{cases}8yz=\lambda 2x\\ 8xz=\lambda 4y\\ 8xy=\lambda 18z\\ x^2+2y^2+9z^2=1.\end{cases}$$

Considérant les deux cas, $\lambda=0$ ou $\lambda\neq 0$. Si $\lambda=0$ alors au moins deux des coordonnées x,y et z sont nulles, d'où le volume est nulle, c'est un minimum, mais pas un maximum. On doit donc supposer $\lambda\neq 0$ et toutes les coordonnées non nulles. On peut donc considérer les quotients; on a :

$$\frac{8yz}{8xz}=\frac{y}{x}=\frac{2\lambda x}{4\lambda y}=\frac{x}{2y}\,,\quad \frac{8yz}{8xy}=\frac{z}{x}=\frac{2\lambda x}{18\lambda z}=\frac{x}{9z}$$

D'où $2y^2 = 9z^2 = x^2$ et la contrainte $x^2 + 2y^2 + 9z^2 = 1$, donne alors $x^2 + x^2 + x^2 = 1$ i.e. $3x^2 = 1$. Comme x est positif, l'unique solution à retenir est $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, par suite $y = \frac{1}{\sqrt{6}}$ et $z = \frac{1}{3\sqrt{3}}$.

Ainsi, le parallélépide est de côtes, $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $b = \frac{2}{\sqrt{6}}$ et $c = \frac{2}{3\sqrt{3}}$

et le volume maximal est $abc = \frac{2}{\sqrt{3}}.\frac{2}{\sqrt{6}}.\frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{8}{9\sqrt{6}}$.

3.0.2 Généralisation à plusieurs contraintes:

On cherche les extrema d'une fonction f sur l'ensemble S défini par $g_1 = g_2 = \ldots = g_k = 0$, toutes les fonctions considérées étant de classe C^1. Pour que les choses marchent bien il faut faire l'hypothèse suivante : en tout point de S les gradients des fonctions g_i sont linéairement indépendants.

3.0.9 THÉORÈME (MULTIPLICATEURS DE LAGRANGE)

Soient f *et* $g_1, \ldots, g_k$, $k+1$ fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 telles que les vecteurs $\nabla g_1, \ldots, \nabla g_k$, *soit linéairement indépendants* sur l'ensemble S défini par

$$g_1(X) = \ldots = g_k(X) = 0.$$

Alors si f admet un extrema lié *sur S en X_0* le vecteur, $\nabla f(X_0)$ *est combinaison linéaire des vecteurs $\nabla g_i(X_0)$* i.e. il existe des nombres réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tels que

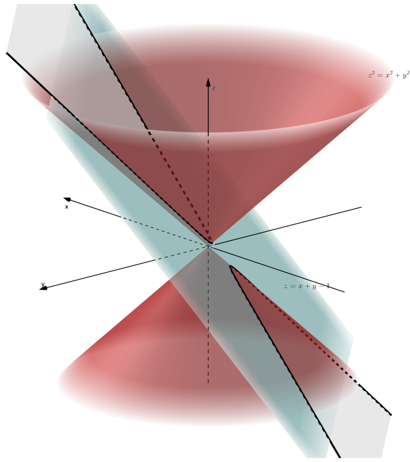
$$\nabla f(X_0) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nabla g_i(X_0).$$

Les nombres réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sont appelés *des multiplicateurs de Lagrange*.

3.0.10 Exercice Déterminer les extrema de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sous les contraintes $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$ et $g_2(x, y, z) = x + y - z + 1 = 0$.

3.0.11 REMARQUE

$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$ est l'équation d'un cône (double) et $g_2(x, y, z) = x + y - z + 1 = 0$ est celle d'un plan, alors $g_2(x, y, z) = g_2(x, y, z) = 0$ est l'intersection de ce cône avec ce plan, dans ce cas on obtient une hyperbole dans l'espace (voir figure)



$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = \|(x,y,z)\|^2$ est le carré de la distance de (x,y,z) à l'origine $(0,0,0)$. Comme l'hyperbole à des points de norme arbitrairement grande, f n'aura pas de maximum, par contre elle atteindra son minimum sur l'hyperbole $S = \{X \in \mathbb{R}^3 \,|\, g_2(x,y,z) = g_2(x,y,z) = 0\}$.

On va utilisant la méthode des multiplicateus de Lagrange. On va résoudre le système

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g_1(x,y,z) + \mu \nabla g_1(x,y,z) \\ z^2 = x^2 + y^2 \\ z = x + y + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2x,2y,2z) = \lambda(2x,2y,-2) + \mu(1,1,-1) = (2\lambda x + \mu, 2\lambda y + \mu, -2\lambda z - \mu) \\ z^2 = x^2 + y^2 \\ z = x + y + 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x = 2\lambda x + \mu \\ 2y = 2\lambda y + \mu \\ 2z = -2\lambda z - \mu \\ z^2 = x^2 + y^2 \\ z = x + y + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x(1-\lambda) = \mu \\ 2y(1-\lambda) = \mu \\ 2z(1+\lambda) = -\mu \\ z^2 = x^2 + y^2 \\ z = x + y + 1 \end{cases}$$

Si $\lambda = 1$, alors $\mu = 0$ et comme $1 + \lambda = 2$ la troisième équation donne $z = 0$, puis la quatrième équation donne $x^2 + y^2 = 0$, doù $x = y = z = 0$, mais $(0,0,0)$ n'est pas solution de la cinquième équation $x + y - z + 1 = 0$, on ne retient pas ce point.

De même, $\lambda \neq 1$ et $\mu = 0$, on trouve l'unique solution $(0,0,0)$, qu'on ne retient pas.

Supposons maintenant, que $\lambda \neq 1$, alors $\mu \neq 0$. En prenant le quotient de $2x(1-\lambda) = \mu$ par $2y(1-\lambda) = \mu$ on obtient $\frac{x}{y} = 1$, d'ou $\boxed{y = x}$, alors $z^2 = x^2 + y^2$, nous donne $z^2 = 2x^2 \implies \boxed{z = \pm\sqrt{2}x}$.

- si $\boxed{z = \sqrt{2}x}$, $x + y - z + 1 = 0 \implies x + x - \sqrt{2}x + 1 = 0 \implies$ $(2-\sqrt{2})x = 1$, d'où $x = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ par suite la solution est

$$(x,y,z) = \boxed{(-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2} - 1)}$$

- si $\boxed{z = -\sqrt{2}x}$, $x + y - z + 1 = 0 \implies x + x + \sqrt{2}x + 1 = 0 \implies$ $(2+\sqrt{2})x = 1$, d'où $x = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ par suite la solution est

$$(x,y,z) = \boxed{(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2} - 1)}$$

On va maintenant comparer les valeurs de f en ces points pour déterminer le minimum de f sur S. On a

$$\begin{aligned} f\left(-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 - \sqrt{2}\right) &= \left(-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (-1-\sqrt{2})^2 \\ &= \left(1 + \sqrt{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \sqrt{2} + \frac{1}{2}\right) + (1 + 2\sqrt{2} + 2) = 6 + 4\sqrt{2}. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f\left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 + \sqrt{2}\right) &= \left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (-1+\sqrt{2})^2 \\ &= \left(1 - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\right) + (1 - 2\sqrt{2} + 2) = 6 - 4\sqrt{2}. \end{aligned}$$

La plus petite valeur étant $6 - 4\sqrt{2}$, f atteint un minimum global sur S au point $\left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 + \sqrt{2}\right)$.