Chapter 2

Le test de la dérivée seconde en toute dimension

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et $a \in U$ un point critique de f.

Alors, d'après le développement limité à l'ordre 2 de f on

$$f(a+X) - f(a) = \frac{1}{2}\,\langle H_f(a)X, X\rangle \;+\; o(\|X\|^2)$$

où $< V, W >= {}^tV.W = v_1w_1 + \dots v_nw_n$ est le produit scalaire standard de $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ par $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ et $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{o(\|X\|^2)}{\|X\|^2} = 0$ (c-à-d que $o(\|X\|^2)$ est négligeable par rapport à $\|X\|^2$ au voisinage de $X = 0$.)

Alors, le signe de $f(a+X) - f(a)$ est en général celui de la forme quadratique $\langle H_f(a)X, X\rangle$.

2.0.1 Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique d'ordre n.

1. On dit que A est **définie positive** si pour tout $X \neq 0$, on a $\langle AX, X\rangle > 0$.

2. On dit que A est **définie négative** si la matrice $-A$ est définie positive.

3. On dit que A **n'est pas définie** s'il existe V_1 et V_2 tels que :
   $\langle AV_1, V_1\rangle > 0$ et $\langle AV_2, V_2\rangle < 0$.

2.0.2 PROPOSITION
Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique d'ordre n. Les conditions suivantes sont équivalentes

1. A est **définie positive**
2. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\det A_i > 0$ où $A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1i} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & \ldots & a_{ii} \end{pmatrix}$
3. A a toutes ses valeurs propres strictement positives. □

2.0.3 REMARQUE
A définie négative $\iff$ $-A$ définie positive.

2.0.4 COROLLAIRE
Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique d'ordre n. Les conditions suivantes sont équivalentes

1. A est **définie négative**
2. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $(-1)^i \det A_i > 0$, où $A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1i} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & \ldots & a_{ii} \end{pmatrix}$
3. A a toutes ses valeurs propres strictement négatives. □

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a \in U$. La matrice hessienne de f en a est la matrice symétrique réelle $H_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}$.
Le théroème suivant généralise le test de la dérivée seconde.

2.0.5 THÉORÈME
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable, U ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a \in U$ un point critique de f (c-à-d $\nabla f(a) = 0$). Alors

1. Si $H_f(a)$ est définie positive, f présente un minimum strict en a.
2. Si $H_f(a)$ est définie négative, f présente un maximum strict en a.
3. Si $H_f(a)$ n'est pas définie, f à un point selle en a.

Démonstration: c'est une conséquence directe du fait que le signe de $f(a+X)-f(a)$ est celui de la forme quadratique $\langle H_f(a)X, X\rangle$. ∎

2.0.7 REMARQUE.
1. Si $\det H_f(a) = 0$ et $H_f(a)$ a toutes ses valeurs propres ≥ 0, (resp. Si $H_f(a)$ a toutes ses valeurs propres ≤ 0) le test échoue: on ne peut rien conclure a priori, avec un développement limité d'ordre 2.
2. Les conditions du théorème sont seulement suffisantes. En effet, $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^4$ présente au point critique $a=(0,0,0)$ un minimum strict (global) mais $\det H_f(a) = 0$.
3. Il se peut qu'une fonction présente en un point un minimum en restriction à toute droite passant par ce point, bien qu'elle ne présente pas de minimum en ce point:

   Par exemple, $f(x,y) = (y-x^2)(y-3x^2)$ on a le long de toute droite vectoriel $ax+by=0$, $f(x,y) \geq 0 = f(0,0)$ dans un certain voisinage de $(0,0)$ (qui dépend de a et b), mais le long de la parabole $y=2x^2$, $f(x,2x^2) = -x^4 \leq 0$, donc $(0,0)$ n'est pas un extremum.

2.0.8 EXEMPLE. Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$, par $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+2xyz$.
On trouve que l'ensemble des points critique de f est

$$Crit(f) = \{(0,0,0),(-1,1,1),(1,-1,1),(1,1,-1),(-1,-1-1)\},$$

et la hessienne en un point (x,y,z) est la matrice $H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 2z & 2y \\ 2z & 2 & 2x \\ 2y & 2x & 2 \end{pmatrix}$.

(i) On a $H_f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, qui est définie positive, d'où f présente un minimum local strict en $(0,0,0)$.

(ii) On a $A = H_f(-1,1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, alors $\det A_i = \det(2) = 2 > 0$, mais $\det A_2 = \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 0$, f ne présente alors pas d'extremum en $(-1,1,1)$. Montrons que c'est un point selle, pour cela on droit trouver deux vecteurs V_1 et V_2 tels que $\langle H_f(-1,1,1)V_1, V_1 \rangle > 0$ et $\langle H_f(-1,1,1)V_2, V_2 \rangle < 0$.

Pour $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a $\langle H_f(-1,1,1)V_1, V_1 \rangle = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = 2 > 0$.

Pour $V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a $\langle H_f(-1,1,1)V_2, V_2 \rangle = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = -2 - 2 - 2 = -6 < 0$.

On a montré que $H_f(-1,1,1)$ n'est pas définie, d'où f présente un point selle en $(0,0,0)$.

2.0.9 Exercice Déterminer la nature des points critiques $(1,-1,1), (1,1,-1)$ et $(-1,-1-1)$ de la fonction de l'exemple précédent.

2.0.10 Exercice Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$, par $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 3z^2 - xy + 2xz + xy$. Étudier les extrema locaux de f.

2.0.1 Extrema de f sur un compact $K \subset \mathbb{R}^2$

La marche à suivre pour étudier les extrema d'une fonction différentiable sur un compact de $\mathbb{R}^2$ est la suivante.

Soit f une fonction différentiable définie sur un compact K de $\mathbb{R}^2$. Comme f est différentiable, elle est continue. Elle est donc bornée sur K et atteint ses bornes.

En pratique, la fonction f sera donnée par une formule valable sur un certain ouvert sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ et le compact K sera inclus dans cet ensemble de définition.

On mène l'étude des extrema de f en plusieurs étapes. La première est d'étudier l'existence d'extrema locaux de f à l'intérieur de K. C'est pour cette étude qu'on utilisera le développement de Taylor à l'ordre 2 donné ci-dessus.

Mais cette étude n'est pas suffisante. Il faut aussi regarder ce qui se passe sur le bord de K. Pour cela on procède autrement. Comme par exemple dansce qui suit

2.0.11 EXEMPLE. Etude de $f(x, y) = x^2 - y^2$ sur $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$. On procède de la manière suivante:

(i) On cherche les points critiques et les extrema locaux dans Int(K).

On trouve un seul point stationnaire en $(0,0)$. Mais en $(0,0) f$ a un point selle. La fonction n'a donc pas d'extremum à l'intérieur de K. Mais comme K est compact et f est continue sur K, f est bornée sur K et atteint ses bornes sur K. Ce sera donc sur le bord de K.

(ii) On analyse f sur le bord $\partial K = K \setminus Int(K)$.

Une possibilité ici est de paramétrer le bord de K : le cercle de rayon 1 centré en $(0,0)$, dont une paramétrisation est donnée par $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$.

On obtient: $g(t) = f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos(2t)$. On peut alors étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0, 2\pi]$. On obtient qu'elle atteint son maximum qui vaut 1, aux points $t = 0, \pi$ et 2π et son minimum qui vaut -1 aux points $t = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{2\pi}{3}$.

La fonction f atteint donc sur K son maximum 1 aux points $(1, 0)$ et $(-1, 0)$ et son minimum -1 aux points $(0, 1)$ et $(0, -1)$.