### 1.0.1 Formule de Taylor

1.0.13 DÉFINITION (MATRICE HESSIENNE)
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^2$ $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a \in U$.
La matrice hessienne de $f$ en $a$ est la matrice symétrique réelle

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}.$$

et pour tout, $1 \leq i, j \leq n$, $\boxed{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)}$ par le théorème de symétrie de Schwarz.

---

1.0.14 THÉORÈME (FORMULE DE TAYLOR À L'ORDRE 2 )
Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a \in U$. Soit $f : U \to R$ est une fonction de classe $C^2$, alors $f$ admet un développement limité à l'ordre 2 donné par

$$f(a+X) = f(a) + < \nabla f(a),\ X > + \frac{1}{2} < H_f(a)X, X > + o(\|X\|^2)$$

où $< V, W >= {}^tV.W = v_1 w_1 + \dots v_n w_n$ est le produit scalaire standard de $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ par $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ et $\lim_{X \to 0} \dfrac{o(\|X\|^2)}{\|X\|^2} = 0$ ( c-à-d que $o(\|X\|^2)$ est négligeable par rapport à $\|X\|^2$ au voisinage de $X = 0$.)

---

1.0.15 REMARQUE
Si on note la forme quadratique par $Q(X) =< H_f(a)X, X >$ où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, alors, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\boxed{Q(X) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j}$$

où $a_{ij} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$.

Par exemple pour $n = 2$ on aura pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

$$Q(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)y^2$$

### 1.0.2 Extrema locaux des fonctions sur $\mathbb{R}^2$

On suppose $f$ de classe $C^2$, c'est-à-dire que ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2 existent et sont continues.

1.0.16 DÉFINITION
*$f$ a un* minimum (*resp.* maximum) *local en* $(x_0, y_0)$ *s'il existe* $\epsilon > 0$ *tel que*: $\forall (x, y) \in B((x_0, y_0), \epsilon)$ *alors* $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$(*resp.* $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$).

---

1.0.17 PROPOSITION (CONDITION NÉCESSAIRE)
Si $f$ admet un extremum local en $(x_0, y_0)$ alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

*Démonstration:* La fonction de une variable $x \mapsto f(x, y_0)$ admet un extremum local en $x_0$, donc sa dérivée $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ en $x_0$ est nulle. On fait de même avec $y \mapsto f(x_0, y)$. $\square$ ■

1.0.19 DÉFINITION
Si en $(x_0, y_0)$ on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ on dit que $(x_0, y_0)$ est un point critique de $f$.

---

1.0.20 REMARQUE
Un extremum local est un point critique mais la réciproque n'est pas vraie.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to f(x, y)$ de classe $C^2$. On suppose que $(a, b)$ est un point critique i.e. $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$.

**Notation:** On utilisera les notations (de Monge):

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b),\ s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b),\ t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \text{ et } \triangle = rt - s^2 = \det(H_f(a, b)).$$

**1.0.21 Remarque**
Avec les notations de Monge, la forme quadratique $Q(x,y)$ devient

$$Q(x,y) = rx^2 + 2sxy + ty^2.$$

**1.0.22 Théorème (test de la seconde dérivée)**
Soient $f$ de classe $C^2$ et $a$ un point critique de $f$.

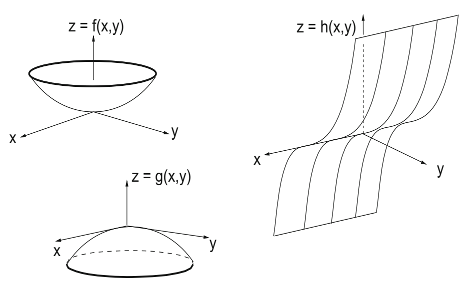
- *si* $\triangle > 0$ *et* $r > 0$, la fonction $f$ présente un minimum local strict en $a$
- *si* $\triangle > 0$ *et* $r < 0$, la fonction $f$ présente un maximum local strict en $a$
- *si* $\triangle < 0$ , la fonction $f$ ne présente pas d'extremum, elle a un point selle en $a$.
- *si* $\triangle = 0$ on ne peut conclure avec le seul développement à l'ordre 2.

---

**1.0.23 Remarque**
si $\triangle = 0$ on ne peut conclure avec le seul développement à l'ordre 2. En effet, si $f(x,y) = x^4$, alors $\Delta(0,0) = 0$ et $f(x,y) = x^4 \geq 0 = f(0,0)$, d'où $f$ à un minimum global en $(0,0)$. De même, pour $g(x,y) = -y^4$, $\Delta(0,0) = 0$ et $g$ a un minimum global en $(0,0)$. Finalement, pour $h(x,y) = x^4 - y^4$ on a aussi $\Delta(0,0) = 0$, mais $h(x,0) \geq 0$ et $h(0,y) \leq 0$ alors $(0,0)$ est un point selles de $h$.

On remarquera que le développement de Taylor à l'ordre 2 de ces fonctions en $(0,0)$ a une partie principale nulle, ne donne aucune information sur le comportement des ces fonctions au voisinage de $(0,0)$.

**1.0.24 Exemple.** On considère les graphes des fonctions, définies sur $\mathbb{R}^2$, suivantes



$f(x,y) = x^2 + y^2$, $g(x,y) = -x^2 - y^2$ et $h(x,y) = y^3$.

Alors, $f$ à un minimum global en $(0,0)$, de même $g$ à un maximum global en $(0,0)$. Le critère de la second dérivée échoue pour, $h$ en $(0,0)$. Comme $h(0,y) = y^3$, elle change de signe en des points arbitrairement proches de $(0,0)$, ainsi $h$ a un point selle en $(0,0)$.

1.0.25 EXEMPLE. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,\ y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Les points critiques de $f$ sont $(0,0)$ et $(1,\ 1)$. Le premier est un point selle, le second un minimum local (non global). On a, $\Delta(x,y) = \det H_f(x,y) = 36xy - 9$ et $r(x,y) = 6x$, en utilisant le test de la dérivée seconde, on a le tableau suivant:

| $(x,y)$ | $(0,0)$ | $(1,1)$ |
|---|---|---|
| $\Delta(x,y)$ | $-9 < 0$ | $27 > 0$ |
| $r(x,y)$ | | $6 > 0$ |
| nature du point | point selle | minimum local |

*Démonstration:* (**du test de la seconde dérivée**) On doit étudier le signe $f(a+(x,y)) - f(a)$ lorsque $(x,y)$ est au voisinage de $(0,0)$. Puisque $\nabla f(a) = 0$, la formule de Taylor à l'ordre 2 donne

$$f(a+(x,y)) - f(a) = \frac{1}{2}Q(x,y) + o(\|(x,y)\|^2) = \frac{1}{2}(r(a)x^2 + 2s(a)xy + t(a)y^2) + o(\|(x,y)\|^2).$$

Alors la meilleure approximation quadratique de $f(a+(x,y)) - f(a)$ est $\frac{1}{2}Q(x,y)$, donc pour étudier le signe de $f(a+(x,y)) - f(a)$ on doit étudier celui de $Q(x,y) = rx^2 + 2sxy + ty^2$ pour $(x,y)$ au voisinge de $(0,0)$.

Supposons $r \neq 0$, alors on écrit: $Q(x,y) = r(x^2 - 2\frac{s}{r}xy) + ty^2 = r(x + \frac{s}{r}y)^2 + (-\frac{s^2}{r^2} + t)y^2 = r(x + \frac{s}{r}y)^2 + \frac{\Delta}{r}y^2$. Ainsi,

$$f(a+(x,y)) - f(a) \sim \frac{1}{2}(r(x + \frac{s}{r}y)^2 + \frac{\Delta}{r}y^2).$$

Maintenant: pour $(x,y) \neq (0,0)$

- *si* $\triangle > 0$ *et* $r > 0$, $f(a+(x,y)) - f(a) > 0$, la fonction $f$ présente alors un minimum local strict en $a$

- *si* $\triangle > 0$ *et* $r < 0$, $f(a+(x,y)) - f(a) < 0$a fonction $f$ présente un maximum local strict en $a$

- *si* $\triangle < 0$ , pour $y = 0$ on $Q(x,0) = rx^2 > 0$ et pour $x = -\frac{s}{r}y$, $Q(-\frac{s}{r}y, y) = \frac{\Delta}{r}y^2 < 0$, ainsi $f(a+(x,y)) - f(a)$ change de signe, la fonction $f$ ne présente alors pas d'extremum, $a$ est un point selle.

∎