1.0.16 EXEMPLE. Calculer la matrice Hessienne de $f(x,\ y) = 4xy - x^4 - y^4$.

1.0.17 THÉORÈME (FORMULE DE TAYLOR À L'ORDRE 2)
Si f est une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, il existe une fonction ϵ tendant vers 0 lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$ telle que

$$f(X+H) = f(X) + < \nabla f(X),\ H > + \frac{1}{2} < \mathrm{Hess}(x_0,\ y_0)H, H > + \|H\|^2 \epsilon(H)$$

où $< V, W >= {}^t V.W = v_1 w_1 + v_2 w_2$ est le produit scalaire standard de $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ par $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$, $(x,y) \to f(x,y)$ de classe C^2. On suppose que (a,b) est un point critique i.e. $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$.

On utilisera la notation (de Monge):

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,\ b),\ s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,\ b),\ t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,\ b).$$

1.0.18 THÉORÈME (TEST DE LA SECONDE DÉRIVÉE)
Soient $f(x,\ y)$ de classe C^2 et $(a,\ b)$ un point critique de f.
Soit $\triangle = rt - s^2 = \det(\mathrm{Hess}(a,\ b)$. Alors :
si $\triangle > 0$ *et* $r > 0$, la fonction f a un minimum local en $(x_0,\ y_0)$
si $\triangle > 0$ *et* $r < 0$, la fonction f a un maximum local en $(x_0,\ y_0)$
si $\triangle < 0$, la fonction f n'a ni maximum ni minimum, elle a un point selle
si $\triangle = 0$ on ne peut conclure (avec le seul développement à l' ordre 2).

1.0.19 EXEMPLE. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,\ y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Les points critiques de f sont $(0,0)$ et $(1,\ 1)$. Le premier est un point selle, le second un minimum local (non global).

Le théorème précédent se traduit par :

1.0.20 COROLLAIRE
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction declasse C^2 U ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $(a,\ b) \in U$ un point critique de f. Alors

1. Cas $\triangle(a,b) \neq 0$

   (a) Si $Hess_f(a,b)$ a ses deux valeurs propres > 0, alors f présente un minimum strict en a.

(b) Si $Hess_f(a,b)$ a ses deux valeurs propres < 0, alors f présente un maximum strict en a.

2. Cas $\det H_f(a) < 0$
alors $Hess_f(a,b)$ a une valeur propre > 0 et une valeur propre < 0, f ne présente pas d'extrémum en (a,b) (c'est un point selle).

3. Cas $\det H_f(a) = 0$, le test échoue avec seulement la donnée de la hessienne.

1.0.21 EXEMPLE. On se propose de déterminer les extréma de $f(x,y) = xye^{(x^2+y^2)}$ sur $U = \mathbb{R}^2$.

1. Les points critiques de f sont les solutions du système $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y(1+2x^2)e^{(x^2+y^2)} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x(1+2y^2)e^{(x^2+y^2)} = 0 \end{cases}$
l'unique solution est $x = y = 0$.

2. Le calcul des dérivées secondes donne $\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2xy(3+2x^2)e^{(x^2+y^2)}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = (1+2x^2)(1+2y^2)e^{(x^2+y^2)}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2xy(3+2y^2)e^{(x^2+y^2)}. \end{cases}$
Au point $(x,y) = (0,0)$, la matrice hessiene $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Comme $\det H_f(0,0) = -1$, $H_f(0,0)$ a des valeurs propres non nulles et de signes opposés. Le point $(0,0)$ est un point selle.

3. On a
$$\lim_{x\to+\infty} f(x,1) = \lim_{x\to+\infty} xe^{x^2} = +\infty$$
et
$$\lim_{x\to-\infty} f(x,1) = \lim_{x\to-\infty} xe^{x^2} = -\infty$$
donc f admet des valeurs arbitrairement grandes (vers $+\infty$) et arbitrairement petites (vers $-\infty$). Elle n'admet donc ni maximum ni minimum global sur $\mathbb{R}^2$.