8.1.15 REMARQUE
Si $\overrightarrow{V} = (P, Q, R)$ alors le produit mixte

$$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{V}.\left(\frac{\partial s}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial s}{\partial v}(u,v)\right) = \det\begin{pmatrix} P(s(u,v)) & \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ Q(s(u,v)) & \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \\ R(s(u,v)) & \frac{\partial z}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial z}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}}$$

2) Si $S$ est un graphe, $z = f(x,y)$ avec $(x,y) \in D$, alors $s(x,y) = (x,y,f(x,y))$ et le vecteur normal est $\frac{\partial s}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial s}{\partial y}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x} \\ -\frac{\partial f}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix}$. Le flux du champs $\overrightarrow{V}$ à travers $S$ est donné alors par l'intégrale double

$$\boxed{flux(\overrightarrow{V}, S) = \iint_D \overrightarrow{V}(x,y,z) \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x} \\ -\frac{\partial f}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix} dxdy}$$

8.1.16 EXEMPLE. Calculer le flux du champ radial $\overrightarrow{V}(x,y,z) = (x,y,z)$ à travers $S_R$, la sphère centrée en $(0,0,0)$ et de rayon $R$, orientée par la normale sortante?

**Réponse:** Dans ce cas la normale $\overrightarrow{n} = \frac{1}{R}(x,y,z)$ est parallèle au champ $\overrightarrow{V}$, et $\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{n} = \frac{1}{R}(x^2+y^2+z^2) = \frac{R^2}{R} = R$.
Ainsi, $flux(\overrightarrow{V}, S_R) = \iint_{S_R} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{n}\, dA = R \iint_{S_R} dA = R \times \text{ Aire}(S_R) = R \times 4\pi R^2 = 4\pi R^3$.

8.1.17 EXEMPLE. Calculer le flux du champ de vecteurs $V(x,y,z) = (x,y,0)$ à travers la sphère unité orientée par la normale sortante?
**Réponse:** Comme les coordonnée spériques déterminent la normale sortante,

$$V(s(\theta,\phi)).\left(\frac{\partial s}{\partial \theta}(\theta,\phi) \wedge \frac{\partial s}{\partial \phi}(\theta,\phi)\right) = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \sin\theta\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \cos\theta\cos^2\phi \\ \sin\theta\cos^2\phi \\ \cos\phi\sin\phi \end{pmatrix} = \cos^3\phi.$$

on obtient alors

$$flux(V,S) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\phi\, d\phi d\theta = 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\phi - \cos(\phi)\sin^2(\phi))d\phi$$

$$= 2\pi\left[\sin\phi - \frac{1}{3}\sin^3(\phi)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8\pi}{3}$$

### 8.1.3 Invariance

8.1.18 THÉORÈME

Le flux d'un champ de vecteurs à travers une surface paramétrée ne dépend pas du paramétrage mais seulement de son orientation. Changer l'orientation change le signe du flux.

---

*Démonstration:* ceci dépend de la définition en fonction de la normale et de l'élément d'aire. Comme c'est la valeur absolue du jacobien du changement de variables qui intervient dans la formule du changement de variables, si on change d'orientation, le jacobien est négatif donc égal à l'opposé de sa valeur absolue, d'où le changement du signe pour le flux.□

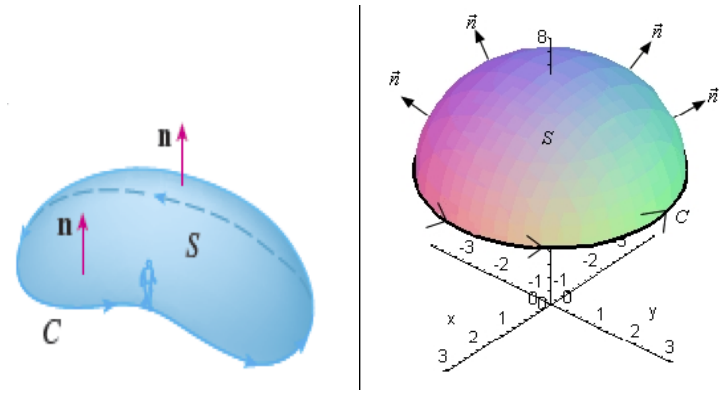
### 8.1.4 Lien entre l'intégrale curviligne et l'intégrale de surface

8.1.20 DÉFINITION (ORIENTATION DU BORD D'UNE SURFACE)

Soit $S$ une surface orientée de bord $\partial S = C$. L'orientation du bord doit être choisie de sorte que lorsqu'un observateur se déplace le long du bord $\partial S = C$ dans le sens positif, avec la surface $S$ sur sa gauche, la normale $\overrightarrow{n}$ est orientée vers le haut ( elle va de ses pieds à sa tête).

On dira dans ce cas que les orientations de $S$ et $\partial S = C$ sont compatibles.

---




8.1.21 THÉORÈME (THÉORÈME DE STOKES)

Soit $C$ une courbe paramétrée, orientée dans le sens direct. Soit $S$ une surface de bord $\partial S = C$, telle que les orientations de $S$ et $C$ soient compatibles.

Soit $\overrightarrow{V}$ un champ de vecteurs de classe $C^1$ dans un voisinage de $S$. Alors on a la formule de Stokes

$$\boxed{circulation(\overrightarrow{V}, C^+) = flux(\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{V}, S^+)}$$

Soit $s(u,v)$ , $(u,v) \in D$, une paramétrisation de la surface $S$ compatible avec l'orientation choisie. La formule de Stokes s'écrit

$$\boxed{flux(\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{V}, S^+) = \iint_D \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{V}.\left(\frac{\partial s}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial s}{\partial v}(u,v)\right) dudv = \int_{C^+} \overrightarrow{V}}$$

---

*Démonstration:* On considère le cas particulier où $S$ est paramétrée par $s$ sur un domaine $D$ du plan (le cas général s'y ramène en découpant la surface en petits morceaux) et $C = \partial S$. On va se ramener à la formule de Green-Riemann.
On pose $P(u,v) = V(s(u,v)).\frac{\partial s}{\partial u}(u,v)$ et $Q(u,v) = V(s(u,v)).\frac{\partial s}{\partial v}(u,v)$.
Alors $circulation(V, s \circ C) = \int_C Pdx + Qdy$. D'après la formule de dérivation des fonctions composées on a

$$\frac{\partial P}{\partial v} - \frac{\partial Q}{\partial u} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{V}.\frac{\partial s}{\partial u} \wedge \frac{\partial s}{\partial v}$$

On applique la formule de Green-Riemann, on obtient

$$flux(\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{V}, S) = \iint_D \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{V}.\frac{\partial s}{\partial u} \wedge \frac{\partial s}{\partial v} dudv = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial v} - \frac{\partial Q}{\partial u}\right) dudv$$

$$= \int_C Pdx + Qdy = circulation(\overrightarrow{V}, \partial S).$$

□

8.1.23 REMARQUE

1) Etant donnée une courbe orientée $C$. Le théorème de Stokes s'applique à toute surface $S$ dont le bord est $C$ et dont l'orientation est compatible avec celle de $C$ et pour tout champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ défini sur $S$.

8.1.24 EXEMPLE. Étant donné le champ de vecteurs $\overrightarrow{V} = (z, x, y)$, on souhaite calculer son travail le long du cercle unité $C$ orienté dans le sens positif. On va faire le calcul en utilisant la formule de Stokes.

i) Naturellement, la surface du disque unité $D$ est bordée par le cercle $C$, on l'oriente par $\overrightarrow{n} = (0,0,1)$ pour que son orientation soit compatible avec l'orientation de $C$. D'autre part, $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{V} = (1,1,1)$. Alors, $flux(\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{V}, D) = \iint_D \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{V} \cdot (0,0,1) dxdy = \iint_D dxdy = aire(D) = \pi$. Ainsi, $\int_C \overrightarrow{V} = flux(\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{V}, S) = \pi$.

ii) On peut aussi prendre une autre surface, par exemple la surface bornée $S$, délimitée par $z = 1 - x^2 - y^2$ et le plan $xOy$. Le bord de la surface $S$ est le cercle $C$, pour une orientation de $S$ compatible avec celle de $C$, il faudrait prendre

le vecteur sortant d'où $\overrightarrow{n}\, dA = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right) dxdy = (2x, 2y, 1)dxdy$. Alors, si $D$ est le disque unité ( la projection de $S$ sur $xOy$), on a $flux(\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{V}, S) = \iint_D \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{V} \cdot (2x, 2y, 1)dxdy = \iint_D (2x + 2y + 1)dxdy$. Par symétrie, $\iint_D 2x\, dxdy = \iint_D 2y\, dxdy = 0$, d'où $flux(\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{V}, S) = \iint_D (2x + 2y + 1)dxdy = \iint_D dxdy = aire(D) = \pi$. Ainsi, $\int_C \overrightarrow{V} = flux(\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{V}, S) = \pi$.

8.1.25 COROLLAIRE

Soit $S$ une surface fermée (c-à-d sans bord). Soit $\overrightarrow{V}$ un champ de vecteurs de classe $C^1$ défini au voisinage de $S$. Alors le flux de $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{V}$ à travers $S$ est nul.

$$\boxed{\partial S = \emptyset \Longrightarrow flux(\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{V}, S) = 0}$$

---

8.1.26 COROLLAIRE

Soit $\overrightarrow{V}$ un champ de vecteurs de classe $C^1$ défini sur un domaine $\Omega$ de $\mathbb{R}^3$. On suppose que le rotationnel de $V$ est nul.

Soit $C$ une courbe fermée qui borde une surface contenue dans $\Omega$. Alors la circulation de $\overrightarrow{V}$ le long de $C$ est nulle.

$$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{V} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \oint_C \overrightarrow{V} = 0}$$

---

8.1.27 EXEMPLE. On considère le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ défini en dehors de l'axe $0z$ par $\overrightarrow{V}(x, y, z) = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{V} = 0$ en dehors de l'axe $0z$. En déduire que la circulation de $\overrightarrow{V}$ le long de toute courbe fermée ne rencontrant pas l'axe $0z$ est égale à $2\pi$ fois le nombre de tours que fait la courbe autour de l'axe $0z$.

**Solution:** Soit $c : t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ une courbe fermée ne rencontrant pas l'axe $0z$. Alors sa projection orthogonale $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ sur le plan $x0y$ est une courbe fermée ne passant pas par l'origine. La surface paramétrée $(t, s) \mapsto (x(t), y(t), sz(t))$ à son bord formé des deux courbes $C$ et $\sigma$, comme $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{V} = 0$ la formule de Stokes nous donne, $circultion(\overrightarrow{V}, C) = circulation(\overrightarrow{V}, \sigma)$.

Ensuite on remarque que $\overrightarrow{V}$ est tangent au plan $x0y$ et sa circulation coïncide avec l'intégrale curviligne de la forme $d\theta$. par conséquent, $circulation(\overrightarrow{V}, \sigma)$ est la variation totale de l'angle polaire le long de $\sigma$, qui vaut $2\pi$ fois le nombre de tours que $\sigma$ fait autour de l'origine. Ce nombre coïncide avec le nombre de tours que fait $C$ autour de l'axe $0z$.

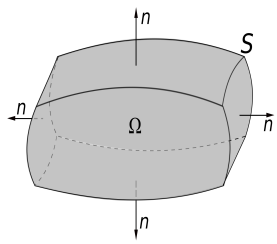
### 8.1.5 Lien entre intégrale triple et intégrale de surface

8.1.28 DÉFINITION
Une surface paramétrée $S$ est dite **fermée** (ou **sans bord**) si son bord est vide i.e. $\partial S = \emptyset$.

---

8.1.29 EXEMPLE. Une sphère est une surface fermée.
Un disque n'est pas une surface fermée, puisque son bord est un cercle.

8.1.30 THÉORÈME (THÉORÈME D'OSTROGRADSKI (OU DE LA DIVERGENCE))
Soit $S$ une surface **fermée** qui délimite un domaine $\Omega$ de $\mathbb{R}^3$ i.e. $\partial\Omega = S$. Soit $\overrightarrow{V}$ un champ de vecteurs de classe $C^1$ défini sur $\Omega$. On choisit l'orientation de $S$ de sorte que le vecteur normal $\overrightarrow{n}$ pointe vers l'extérieur de $\Omega$.




Alors, on a la formule d'Ostrogradski:

$$\boxed{\iiint_\Omega \operatorname{div}(\overrightarrow{V})dxdydz = flux(\overrightarrow{V}, S)}$$

---

*Démonstration:* Pour simplifier, on suppose $\Omega$ convexe. Soit $D_x$ sa projection sur le plan $\{x = 0\}$. Alors

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ (y, z) \in D_x\ f_1(y, z) \leq x \leq f_2(y, z)\}$$

On a $\iiint_\Omega \frac{\partial V_x}{\partial x} dxdydz = \iint_{D_x} V_x(f_2(y, z), y, z)dydz = flux(V_1, S)$ où $V_1$ est le champ de vecteurs $(V_x, 0, 0)$.

De même on trouve $\iiint_\Omega \frac{\partial V_y}{\partial y} dxdydz = flux(V_2, S)$ et $\iiint_\Omega \frac{\partial V_z}{\partial z} dxdydz = flux(V_3, S)$

Comme $V = V_1 + V_2 + V_3$, on trouve la formule annoncée. □

8.1.32 COROLLAIRE
Soit $\overrightarrow{V}$ un champ de vecteurs est de classe $C^1$ sur un convexe $\Omega$ de $\mathbb{R}^3$.

Si $\overrightarrow{V}$ a une divergence nulle, alors son flux à travers toute surface $S$ fermée contenue dans $\Omega$ est nul.

$$\boxed{\text{div}\,(\overrightarrow{V}) = 0 \Longrightarrow flux(\overrightarrow{V}, S) = 0}$$

---

8.1.33 EXEMPLE. Calculer le volume de la boule unité $B$ à l'aide du champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(x, y, z) = (x, y, 0)$.

**Solution:** On a $div(V) = 2$. On oriente la sphère unité $S$ par la normale sortante. La formule d'Ostrogradski nous donne

$$2\text{Vol}(B) = \iiint_B div(V)dxdydz = flux(\overrightarrow{V}, S)$$

et le calcul de l'exemple 8.1.17, donne $flux(\overrightarrow{V}, S) = \frac{8\pi}{3}$, d'où le volume de la boule unité est égal à $\dfrac{4\pi}{3}$.

8.1.34 EXEMPLE. Calculer le flux du champ $\overrightarrow{V}(x, y, z) = x^2\overrightarrow{i} + y^2\overrightarrow{j} + z^2\overrightarrow{k}$ à *travers* la *surface fermée* $S^+$ *formée* du *cône précédent* $z^2 = x^2 + y^2$, $z \in [0, 3]$

*et du disque* $x^2 + y^2 \leq 9$, $z = 3$, *orientée* par le vecteur *normal sortant*.

**Réponse:** Comme la surface est fermée, on peut utiliser le théorème d'Ostrogradski:

$$flux(\overrightarrow{V}, S^+) = \iiint_\Omega \text{div}\,\overrightarrow{V}\,dxdydz,$$

où $\Omega$ est le solide délimité par $S$, donc $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z^2,\ 0 \leq z \leq 3\}$, et div $\overrightarrow{V}(x, y, z) = 2x + 2y + 2z$. On a alors, $flux(\overrightarrow{V}, S^+) = 2\iiint_\Omega (x + y + z)dxdydz$, par symétrie, par rapport à $xOz$ et $yOz$, on a

$$\iiint_\Omega x\,dxdydz = \iiint_\Omega y\,dxdydz = 0.$$

Il ne reste plus qu'à calculer $2\iiint_\Omega z\,dxdydz$, par exemple par le théorème de Fubini ( par piles verticales): on note par $D_z$ le disque centré en $(0, 0, z)$ et de rayon $z$, alors

$$flux(\overrightarrow{V}, S^+) = 2\iiint_\Omega z\,dxdydz = 2\int_0^3 z(\iint_{D_z} dxdy)\,dz = 2\int_0^3 z\,aire(D_z)\,dz$$

$$= 2\int_0^3 z(\pi z^2)dz = 2\pi\left[\frac{z^4}{4}\right]_0^3 = \frac{81\pi}{2}.$$