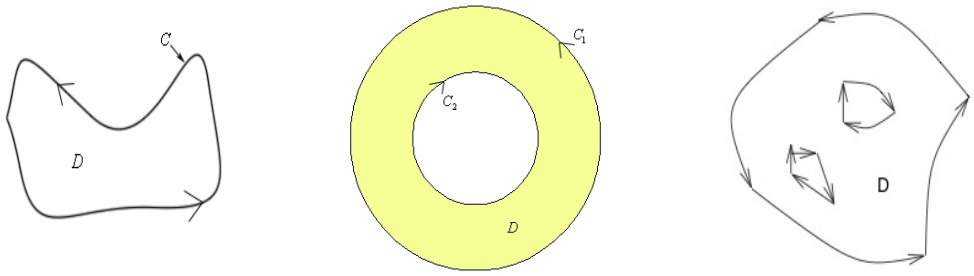


Les domaines que nous considérons pour l'énoncé du Théorème de Green-Riemann seront de cette forme, un tel domaine sera appelé "domaine admissible".

7.3.2 Théorème (Green-Riemann)

1) Soit $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ une forme différentielle de classe C^1 définie sur un domaine admissible D du plan. On suppose que son bord ∂D^+ est orienté dans le sens direct.

   Alors

$$\int_{\partial D^+} \omega = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \quad \text{(Formule de Green-Riemann).}$$

   La version équivalente pour les champs de vecteurs:

2) Soit $\overrightarrow{V}(x,y) = P(x,y)\,\overrightarrow{i} + Q(x,y)\,\overrightarrow{j}$ un champ de vecteurs de classe C^1 défini sur un domaine admissible D du plan On suppose que son bord ∂D est orienté dans le sens direct. Alors

$$\int_{\partial D^+} \overrightarrow{V} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \quad \text{(Formule de Green-Riemann).}$$

7.3.3 Remarque

Si $\overrightarrow{V}$ est un champ de vecteurs (ou ω est une forme différentielle) comme dans l'énoncé du théorème, qui satisfait

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

alors son intégrale sur ∂D est nulle.

En particulier si $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi$ est un champ de gradient (ou ω est une forme différentielle exacte), alors grâce au lemme de Schwarz,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

d'où son intégrale sur ∂D est nulle, on retrouve ainsi le résultat qui dit que l'intégrale curviligne d'un champ de gradient le long d'une courbe fermée est nulle .

Démonstration: Commençons par démontrer ce théorème dans des cas particuliers.

1) Dans le cas d'un rectangle $D = [a, b] \times [c, d]$. On calcule successivement les deux termes de l'égalité dans la formule de Green-Riemann, et on vérifie qu'on obtient la même chose.

   La courbe fermée ∂D^+ est formée de 4 segments orientés $[(a, c), (b, c)]$, $[(b, c), (b, d)]$, $[(b, d), (a, d)]$ et $[(a, d), (a, c)]$, ainsi

$$\begin{aligned}\int_{\partial D^+} \omega &= \int_a^b P(x, c)dx + \int_c^d Q(b, y)dy + \int_b^a P(x, d)dx + \int_d^c Q(a, y)dy \\ &= \int_a^b P(x, c)dx + \int_c^d Q(b, y)dy - \int_a^b P(x, d)dx - \int_c^d Q(a, y)dy\end{aligned}$$

   D'autre part, d'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}\iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y))dxdy &= \int_c^d (\int_a^b \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)dx)dy - \int_a^b (\int_c^d \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)dy)dx \\ &= + \int_c^d Q(b, y)dy - \int_c^d Q(a, y)dy + \int_a^b P(x, c)dx - \int_a^b P(x, d)dx.\end{aligned}$$

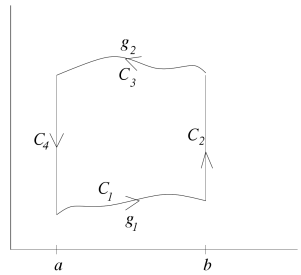
   D'où l'égalité $\displaystyle\int_{\partial D^+} \omega = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$

2) On suppose maintenant que

   •$\omega(x,\ y) = P(x, y)dx$,

   •$D = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$, où $g_1 \leq g_2$ sont de classe C^1.

   Appelons C_1, C_2, C_3, C_4 les courbes comme sur la figure ci-dessous.



Soit γ_i une paramétrisation correspondant à C_i :

$$\gamma_1 : [a,\ b] \to \mathbb{R}^2,\ \gamma_1(t) = (t,\ g_1(t))\ ,$$
$$\gamma_2 : [g_1(b),\ g_2(b)] \to \mathbb{R}^2,\ \gamma_2(t) = (b,\ t)\ .$$

Alors,

$$\int_{C_1} \omega = \int_a^b P(t,\ g_1(t))dt, \quad \int_{C_2} \omega = \int_{g_1(b)}^{g_2(b)} 0\ dt = 0.$$

Et de manière similaire:

$$\int_{C_3} \omega = -\int_a^b P(t,\ g_2(t))dt, \quad \int_{C_4} \omega = 0.$$

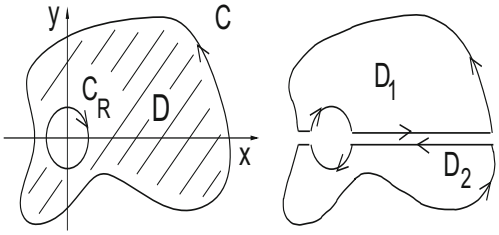
Ainsi $\int_{\partial D} \omega = \int_{C_1} \omega + \int_{C_2} \omega + \int_{C_3} \omega + \int_{C_4} \omega = \int_a^b (P(t,\ g_1(t)) - P(t,\ g_2(t)))dt$.
D'autre part, d'après le théorème de Fubini,

$$\iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \int_a^b (\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} -\frac{\partial P}{\partial y}dy)dx = \int_a^b P(x,\ g_1(x)) - P(x,\ g_2(x))dx.$$

D'où l'égalité $\displaystyle\int_{\partial D} \omega = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$

3) De manière analogue, on peut montrer le théorème dans le cas où:
   •$\omega(x,\ y) = Q(x,y)dy$
   •$D = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 | g_1(y) \leq x \leq g_2(y),\ c \leq y \leq d\}$, où $g_1 \leq g_2$ sont de classe C^1.

La combinaison de ces deux cas particuliers donne une preuve du Théorème de Green-Riemann, lorsque le domaine est à la fois du type I et de type II, on termine en observant que grâce à la propriété d'additivité, on obtient une preuve pour les domaines qui sont réunion finie de domaines de type I et II. □



■

$\partial D = C_R \cup C$

Application au calcul d'aires

On peut appliquer la formule de Green-Riemann dans le cas où D est domaine du plan dont le bord est une courbe fermée $\partial D = \gamma$ alors pour $\omega = -ydx$, on obtient $\int_{\gamma^+} -ydx = \iint_D dxdy$ et pour $\omega = xdy$, on a $\int_{\gamma^+} xdy = \iint_D dxdy$ d'où le calcul de l'aire via l'intégrale curviligne

$$\boxed{Aire(D) = \iint_D dxdy = -\int_{\gamma^+} ydx = \int_{\gamma^+} xdy = \frac{1}{2}\int_{\gamma^+} -ydx + xdy} \tag{7.1}$$

Si en coordonnées polaires $\partial D = \{(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta) \mid \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}$ alors

$$\boxed{Aire(D) = \frac{1}{2}\int_{\partial D^+} -ydx + xdy = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2(\theta)d\theta} \tag{7.2}$$

7.3.5 EXEMPLE (AIRE D'UNE ELLIPSE). L'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ a pour équation paramétrique $x = a\cos(t)$, $y = b\sin(t)$ avec $t \in [0, 2\pi]$

D'après la formule de Green-Riemann, l'aire de l'ellipse $\mathcal{E}$ est alors égale à:

$$Aire(\mathcal{E}) = \frac{1}{2}\int_{\partial D^+} -ydx + xdy = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(ab\cos^2(t) + ab\sin^2(t)\right) dt = \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} dt = ab\pi.$$

7.3.6 EXEMPLE. Déterminer le travail du champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(x, y) = (3x + y, -x + 2y)$ le long de l'ellipse $4x^2 + y^2 = 4$, orientée dans le sens trigonométrique.

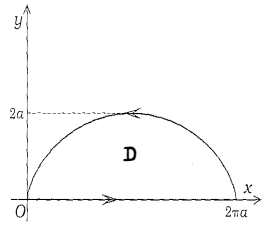
Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble formé de l'ellipse et de son intérieur. Le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, et $\mathcal{E}$ est un domaine admissible pour le Théorème de Green-Riemann, donc on peut l'appliquer pour obtenir

$$\text{le travail de } \overrightarrow{V} = \int_{\partial\mathcal{E}^+} \overrightarrow{V} = \int_{\mathcal{E}} (-2)dxdy = -2Aire(\mathcal{E}) = -4\pi.$$

7.3.7 EXEMPLE (AIRE D'UNE ARCHE DE CYCLOÏDE). (trajectoire d'un point fixé sur un cercle qui roule sans glisser sur une droite)

Etant donnée l'arche de cycloïde D limité par l'axe Ox et la courbe paramétrée $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ définie par $\gamma(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$ où a est un nombre réel > 0. D'après la formule de Green-Riemann, on aura

$$Aire(D) = -\int_{\partial D^+} ydx = \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2\, dt = a^2\int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)\, dt = 3a^2\pi$$



Chapter 8

Intégrales de Surface

8.1 Surfaces paramétrées

8.1.1 Définition

Une **surface paramétrée** dans l'espace, est la donnée d'une fonction s de classes C^1 définie sur un domaine D de $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{array}{rcl} s : D & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,\ v) & \longmapsto & s(u,v) = (x(u,\ v),\ y(u,\ v),\ z(u,\ v)) \end{array}$$

qu'on notera aussi par $s(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$. On notera par S l'image de s.

8.1.2 Définition

On dit qu'une surface paramétrée

$$\begin{array}{rcl} s : D & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,\ v) & \longmapsto & (s(u,\ v),\ y(u,\ v),\ z(u,\ v)) \end{array}$$

est **régulière** en un point $(u,\ v) \in D$ si les vecteurs dérivées partielles $\dfrac{\partial s}{\partial u}(u,\ v)$ et $\dfrac{\partial s}{\partial v}(u,\ v)$ sont linéairement indépendantes. Le plan passant par $s(u,v)$ et de base (ou engendré par) $\left\{ \dfrac{\partial s}{\partial u}(u,\ v), \dfrac{\partial s}{\partial v}(u,v) \right\}$ est appelé plan tangent en (u,v) à la surface paramétrée s.

---

1) Un point $(u,v) \in D$ est régulier si et seulement si

$$\frac{\partial s}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial s}{\partial v}(u,v) \neq 0$$

2) Soit f une surface paramétrée régulière. Le vecteur

$$\overrightarrow{n}(u,\ v) := \frac{\partial s}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial s}{\partial v}(u,v)$$

est un vecteur non nul normal au plan tangent en (u,v) de la surface paramétrée S.

3) le vecteur

$$\overrightarrow{n}(u,v) = \frac{\frac{\partial s}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial s}{\partial v}(u,v)}{||\frac{\partial s}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial s}{\partial v}(u,v)||}$$

est un **vecteur unitaire normal** *à S au point $s(u,v)$.*

8.1.3 EXEMPLE. Soit

$$\begin{array}{rccc} s: & [0,1]\times[0,1] & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (u,\ v) & \to & (u,\ v,\ u^2) \end{array}$$

On a $\dfrac{\partial s}{\partial u}(u,\ v) = (1,0,2u)$ et $\dfrac{\partial s}{\partial v}(u,\ v) = (0,1,0)$ ainsi

$$\frac{\partial s}{\partial u}(u,\ v) \wedge \frac{\partial s}{\partial v}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Par conséquent la surface est régulière en tout point de $[0,1]\times[0,1]$ et un champ de vecteurs unitaire normal à la surface est donné par

$$\overrightarrow{n}(u,v) = \frac{1}{\sqrt{4u^2+1}}(-2u,0,1)$$

8.1.4 DÉFINITION (ORIENTATION)

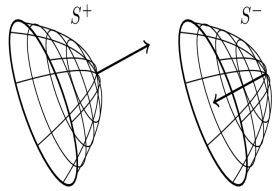
Soit S une surface paramétrée régulière, le choix d'un champ de vecteurs normaux unitaires

$$\overrightarrow{n} : D \to \mathbb{R}^3$$

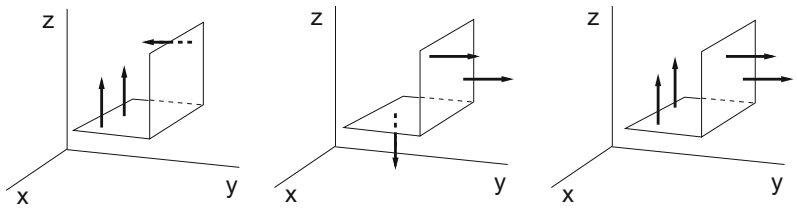
s'appelle une **orientation** de S.

• Il n'y a que deux choix possibles $\overrightarrow{n} = \dfrac{\frac{\partial s}{\partial u} \wedge \frac{\partial s}{\partial v}}{\|\frac{\partial s}{\partial u} \wedge \frac{\partial s}{\partial v}\|}$ ou $\overrightarrow{n} = -\dfrac{\frac{\partial s}{\partial u} \wedge \frac{\partial s}{\partial v}}{\|\frac{\partial s}{\partial u} \wedge \frac{\partial s}{\partial v}\|}$

• Un choix ayant été effectué, on note S^+ la surface orientée par ce choix et S^- par le choix opposé.



• Une paramétrisation de la surface S est dite compatible avec l'orientation choisie si l'orientation est donnée par $\overrightarrow{n} = \dfrac{\frac{\partial s}{\partial u} \wedge \frac{\partial s}{\partial v}}{\|\frac{\partial s}{\partial u} \wedge \frac{\partial s}{\partial v}\|}$.



Les deux surfaces à gauche sont orientées, mais celle à droite n'est pas orientée.

8.1.5 EXEMPLE. On utilise les coordonnées sphériques sur la sphère unité

$$s(\theta,\phi) = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \sin\theta\cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix}, \quad \theta \in [-\pi,\pi], \quad \phi \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[,$$

Quel est la normale déterminée par cette paramétrisation?

Solution: On calcule

$$\frac{\partial s}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial s}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\phi\cos\theta \\ \cos^2\phi\sin\theta \\ \cos\phi\sin\phi \end{pmatrix} = \cos\phi.s(\theta,\phi).$$

Comme $\cos\phi > 0$, $\overrightarrow{n}(\theta,\phi) = s(\theta,\phi)$ est la normale sortante(c'est le vecteur radial sortant à la sphère).

8.1.1 Aire d'une surface

Aire d'un parallélogramme

L'aire d'un parallélogramme est le produit de la longueur de sa base par celle de la hauteur. Si le parallélogramme P est engendré par les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$, alors

$$aire(P) = ||\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}||.$$

En effet, soit $\overrightarrow{OC}$ la projection de $\overrightarrow{OB}$ sur la droite engendrée par $\overrightarrow{OA}$, alors $\overrightarrow{OC}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{CB}$ est orthogonal à $\overrightarrow{OA}$. D'où $||\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}|| = ||\overrightarrow{OA} \wedge (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC})|| = ||\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{CB}|| = ||\overrightarrow{OA}||.||\overrightarrow{CB}|| = base \times hauteur$.

Revenant à la surface paramétrée S, définie par $s(u,v)$, telle que $(u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2$. L'image d'un rectangle de sommet (u,v) et dont les côtés Δu et Δv sont très petits est approximativement un paraléllogramme construit sur les vecteurs

$\overrightarrow{U} = s(u+\Delta u, v) - s(u,v) \sim \dfrac{\partial s}{\partial u}\Delta u$ *et* $\overrightarrow{V} = s(u, v+\Delta v) - s(u,v) \sim \dfrac{\partial s}{\partial v}\Delta v$, *donc son aire* $\| \overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V} \|$ *est voisine de*

$$\left\| \frac{\partial s}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial s}{\partial v}(u,v) \right\| \Delta u \Delta v$$

Ceci motive la définition suivante:

8.1.6 DÉFINITION
L'aire d'une surface paramétrée S définie par $s(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$, $(u,v) \in D$, est donnée par l'intégrale double

$$Aire(S) = \iint_D dA = \iint_D \left\| \frac{\partial s}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial s}{\partial v}(u,v) \right\| dudv$$

où $dA = \left\| \dfrac{\partial s}{\partial u}(u,v) \wedge \dfrac{\partial s}{\partial v}(u,v) \right\| dudv$ est appelé **élément d'aire**.
On note aussi l'élément d'aire par dS.

8.1.7 REMARQUE
Si S est un graphe, $z = f(x,y)$ avec $(x,y) \in D$, alors $s(x,y) = (x,y,f(x,y))$ et le vecteur normal dans ce cas est

$$\overrightarrow{n}(x,y,z) = \frac{\partial s}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial s}{\partial y}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x} \\ -\frac{\partial f}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alors, l'élément d'aire

$$dA = \left\| \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right) \right\| dxdy = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} \quad dxdy.$$

8.1.8 EXEMPLE. L'aire de la surface $S = \{(x,y,2x) \mid (x,y) \in [0,1]^2\}$ est égale à

$$\iint_{[0,1]^2} \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dxdy = \iint_{[0,1]^2} \sqrt{4+1} \quad dxdy = \sqrt{5}\int_0^1 dx \int_0^1 dy = \sqrt{5}.$$

8.1.9 EXEMPLE. Calculer l'aire du triangle de sommets $a = (1,0,0)$, $b = (0,-1,2)$ et $c = (0,2,1)$.

Solution: On utilise la paramétrisation $s(u,v) = a + u(b-a) + v(c-a)$ où $u \geq 0$, $v \geq 0$ et $u + v \leq 1$. On a $a = s(0,0)$, $b = s(1,0)$ et $c = s(0,1)$. On calcule

$$\frac{\partial s}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial s}{\partial v}(u,v) = (b-a) \wedge (c-a)$$

D'où $Aire(S) = \iint_D \left|\left|\frac{\partial s}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial s}{\partial v}(u,v)\right|\right| dudv) = ||(b-a) \wedge (c-a)|| \iint_D dudv = ||(b-a) \wedge (c-a)||.aire(D)$.
Comme $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2;\ u+v \leq 1,\ u \geq 0,\ v \geq 0\}$ c'est le triangle de sommets $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,1)$ donc d'aire $\frac{1}{2}$, d'où l'aire de S est égale à $\frac{||(b-a)\wedge(c-a)||}{2}$.
Puisque $a = (1,0,0)$, $b = (0,-1,2)$ et $c = (0,2,1)$ on aura $||(b-a) \wedge (c-a)|| = ||(-5,-1,-3)|| = \sqrt{35}$ d'où $aire(S) = \frac{\sqrt{35}}{2}$.

8.1.10 EXEMPLE. Calculer l'aire de la sphère S_R de centre 0 et de rayon R?

Solution: On utilise les coordonnées sphériques sur la sphère de centre 0 et de rayon R

$$s(\theta,\phi) = \begin{pmatrix} R\cos\theta\cos\phi \\ R\sin\theta\cos\phi \\ R\sin\phi \end{pmatrix}, \quad \theta \in [-\pi,\pi], \quad \phi \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}].$$

On a

$$\frac{\partial s}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial s}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -R\sin\theta\cos\phi \\ R\cos\theta\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -R\cos\theta\sin\phi \\ -R\sin\theta\sin\phi \\ R\cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^2\cos^2\phi\cos\theta \\ R^2\cos^2\phi\sin\theta \\ R^2\cos\phi\sin\phi \end{pmatrix} = R\cos\phi.s(\theta,\phi),$$

d'où $\|\frac{\partial s}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial s}{\partial v}(u,v)\| = R\cos\phi.\|s(\theta,\phi)\| = R^2\cos\phi$
Finalement,

$$Aire(S_R) = \iint_{[-\pi,\pi]\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} R^2\cos\phi d\theta d\phi = R^2 \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi = 4\pi R^2.$$

Invariance

8.1.11 THÉORÈME
L'aire ne dépend pas du choix du paramétrage.

Démonstration: Changer de paramétrage, c'est remplaçer (u,v) par (u',v') qui sont fonction inversible de u et v. D'après la formule de dérivation des fonctions composées, le nouveau paramétrage $s_1(u',v') = s(u,v)$ satisfait:

$$\frac{\partial s_1}{\partial u'} = \frac{\partial s_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial u'} + \frac{\partial s_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u'} \qquad \frac{\partial s_1}{\partial v'} = \frac{\partial s_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v'} + \frac{\partial s_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial v'}$$

$$\frac{\partial s_1}{\partial u'} \wedge \frac{\partial s_1}{\partial v'} = \frac{\partial s}{\partial u} \wedge \frac{\partial s}{\partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial u'}\frac{\partial v}{\partial v'} - \frac{\partial v}{\partial u'}\frac{\partial u}{\partial v'}\right) = \frac{\partial s}{\partial u} \wedge \frac{\partial s}{\partial v}.\det\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial u'} & \frac{\partial u}{\partial v'} \\ \frac{\partial v}{\partial u'} & \frac{\partial v}{\partial v'} \end{pmatrix}$$

et on conclut avec la formule de changement de variables dans les intégrales doubles.□

8.1.2 Flux d'un champ de vecteurs à travers une surface

Pour déterminer le flux d'un champ de vecteurs à travers une surface, Il faut préciser si on s'intéresse au flux sortant ou rentrant, d'où la nécessité d'orienter la surface. Il faudrait alors éviter les surfaces non-orientables, comme le célèbre ruban de Möbius (voir Figure ci-dessous).

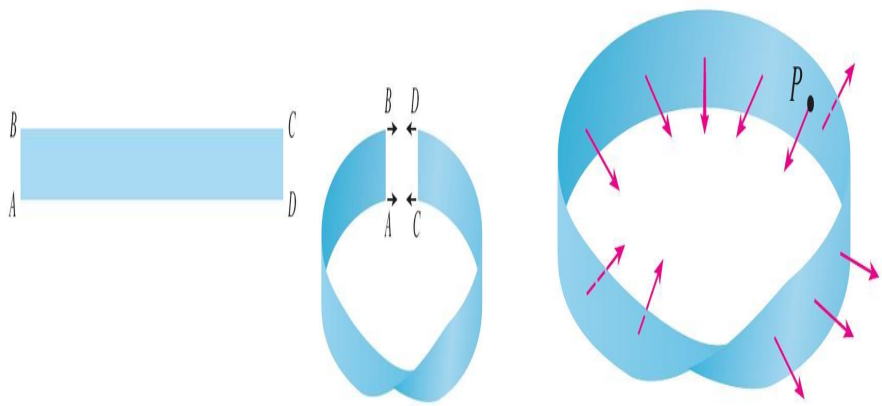


Figure 8.1: Ruban de Möbius

8.1.13 DÉFINITION

Soit $\overrightarrow{V}(x,y,z)$ un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^3$. Soit S une surface orientée par un choix de normale unitaire $\overrightarrow{n}$. Le flux de $\overrightarrow{V}$ à travers S est l'intégrale

$$flux(\overrightarrow{V},S) = \iint_S \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{n}\, dA$$

où dA désigne l'élément d'aire.

8.1.14 REMARQUE

1) Si $s(u,v)$, $(u,v) \in D$, est une paramétrisation régulière de la surface S compatible avec l'orientation choisie. Comme $dA = \left\| \frac{\partial s}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial s}{\partial v}(u,v) \right\| dudv$ et $\overrightarrow{n} = \frac{\frac{\partial s}{\partial u} \wedge \frac{\partial s}{\partial v}}{\| \frac{\partial s}{\partial u} \wedge \frac{\partial s}{\partial v} \|}$, le flux du champs $\overrightarrow{V}$ à travers S s'écrit alors

$$\boxed{flux(\overrightarrow{V},S) = \iint_D \overrightarrow{V}(s(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial s}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial s}{\partial v}(u,v) \right) dudv}$$