7.2 Intégrales curvilignes d'une forme différentielle et circulation d'un champ de vecteurs

On va commence par définir maintenant les objets à intégrer sous deux formes.

7.2.1 DÉFINITION

Une **forme différentielle** ω (de degré 1) sur un domaine D est une expression de la forme :

$$\omega(x) = a_1(x)dx_1 + \ldots + a_n(x)dx_n$$

où pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, a_i est une fonction de classe C^1 dans $D \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Par exemple, on notera

1. (en dimension $n = 2$): $\omega(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ où P et Q sont des fonctions de classe C^1 de $D \subset \mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
2. (en dimension $n = 3$): $\omega(x, y, z) = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$ où P, Q et R sont des fonctions de classe C^1 de $D \subset \mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

7.2.2 EXEMPLE. Soient D un domaine de $\mathbb{R}^3$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Alors sa différentielle

$$df(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)\, dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)\, dz$$

est une forme différentielle (de degré 1) sur le domaine D.

7.2.3 DÉFINITION

On associe à la forme différentielle ω le **champ de vecteurs** $\overrightarrow{V}$ défini sur D à valeur dans $\mathbb{R}^n$ par:

$$\overrightarrow{V}(x) = (a_1(x), \ldots, a_n(x))$$

où pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, a_i est une fonction de classe C^1 dans $D \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Par exemple, on notera

1. $\overrightarrow{V}(x,y) = P(x,y)\overrightarrow{i} + Q(x,y)\overrightarrow{j}$ (en dimension $n = 2$)
2. $\overrightarrow{V}(x,y,z) = P(x,y,z)\overrightarrow{i} + Q(x,y,z)\overrightarrow{j} + R(x,y,z)\overrightarrow{k}$ (en dimension $n = 3$)

7.2.4 Remarque

Le champ de vecteur associé à la différentielle df est le gradient $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$.

7.2.5 Définition

1) La forme différentielle ω est dite **exacte** (ou **totale**) s'il existe une fonction f de classe C^2 de D dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\omega = df$$

et la version correspondante pour les champs de vecteurs :

2) Un champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ est un **champ de gradient (ou dérive d'un potentiel)** s'il existe une fonction f de classe C^2 de D dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f$$

7.2.6 Définition

1) Une fome différentielle $\omega(x) = a_1(x)dx_1 + \ldots + a_n(x)dx_n$ est dite **fermée** si pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, on a $\dfrac{\partial a_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial a_j}{\partial x_i}$.

   Par exemple en dimension 3: une fome différentielle $\omega = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ est dite **fermée** si $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $\dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial y}$.

2) Un champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(x) = (a_1(x), \ldots, a_n(x))$ est dit **irrotationnel** sur D si pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, on a $\dfrac{\partial a_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial a_j}{\partial x_i}$.

   Par exemple en dimension 3: un champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ est dit **irrotationnel** sur D si son rotationnel est nul ($\overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{V}) = \overrightarrow{0}$) sur D.

où $\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{V} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\overrightarrow{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\overrightarrow{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\overrightarrow{k}}$

que nous pouvons écrire formellement $\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{V} = \det\begin{pmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix}}$

7.2.7 Remarque (importante)

Une condition **nécessaire** pour qu'une forme différentielle ω soit exacte (resp. pour qu'un champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(x,y,z)$ soit un champ de gradient) est qu'elle soit fermée (resp. qu'il soit irrotationnel).
C'est une application du lemme de Schwarz, qui dit que pour une fonction de classe C^2, les dérivée partielles secondes ne dépendent pas de l'ordre de dérivation: c-à-d pour tous $i,j \in \{1,\ldots,n\}$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Cette condition n'est en général pas suffisante.

7.2.8 Définition (Intégrale curviligne)

Soit γ **une courbe paramétrée** (de classe C^1)

$$\begin{array}{cccc} \gamma : [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ t & \longmapsto & (x_1(t), x_2(t), \ldots x_n(t)) \end{array}$$

de support $C = \{\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots x_n(t)) |\ t \in [a,b]\}$, contenu dans D et $\omega(x) = a_1(x)dx_1 + \ldots + a_n(x)dx_n$ **une forme différentielle** (de degré 1) sur D.
L'**intégrale curviligne** de ω le long de γ est le nombre réel :

$$\boxed{\int_\gamma \omega := \int_a^b \left(a_i(\gamma(t))x_1'(t) + \ldots + a_n(\gamma(t))x_1'(t)\right) dt}$$

Par exemple en dimension 3: l'**intégrale curviligne** d'une forme différentielle de classe C^1,

$$\omega = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

le long de la courbe γ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad , t \in [a, b]$$

est le nombre réel :

$$\boxed{\int_\gamma \omega = \int_a^b \big(P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)\big)\, dt}$$

La version en dimension 2, s'obtient en ôtant la variable z et la composante R c-à-d:

$$\boxed{\int_\gamma \omega = \int_\gamma P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b \big(P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)\big)\, dt}$$

où γ est de représentation paramétrique $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad , \ t \in [a, b].$

Si γ est une courbe **fermée** (c-à-d $\gamma(a) = \gamma(b)$), on notera aussi dans ce cas, l'intégrale curviligne de ω le long de la courbe γ par

$$\oint_\gamma \omega$$

7.2.9 EXEMPLE. Soit $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ la courbe définie par $\gamma(t) = (2t + 1, t, 3t - 1)$ et $\omega = -zdx + xdy + ydz$. On va calculer l'intégrale curviligne $\int_\gamma \omega$.
On a $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) = (2, 1, 3)$ et par suite
$\int_\gamma \omega = \int_0^1 (-(3t - 1)(2) + (2t + 1)(1) + t(3))dt = \int_0^1 (-t + 3)dt = \frac{5}{2}$.

7.2.10 PROPOSITION
L'intégrale curviligne d'une forme différentielle le long d'une courbe ne dépend que de l'orientation, pas du choix de paramétrisations équivalentes.

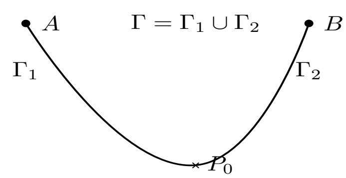
7.2.11 PROPOSITION (PROPRIÉTÉS DES INTÉGRALES CURVILIGNES)

1. Si on note par $-\gamma$ la courbe γ parcourue dans le sens inverse, alors:

$$\int_{-\gamma} \omega = -\int_\gamma \omega.$$

2. Soient ω_1 et ω_2 deux formes différentielles, a et b deux nombres réels, alors
$$\int_\gamma a\omega_1 + b\omega_2 = a\int_\gamma \omega_1 + b\int_\gamma \omega_2.$$

3. (Relation de Chasles) Soit P_0 un point de la courbe Γ, à partir de P_0 on décompose Γ en deux courbes d'extrémités P_0, notons les Γ_1 et Γ_2, alors: $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ et $\int_\Gamma \omega = \int_{\Gamma_1\cup\Gamma_2} \omega = \int_{\Gamma_1} \omega + \int_{\Gamma_2} \omega$.



7.2.12 EXEMPLE. L'intégrale curviligne de la forme différentielle $\omega(x,y,z) = zdx - ydy + xdz$ le long de l'arc d'hélice $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ avec $t \in [0,\ 2\pi]$ est égale à:
$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} (t\frac{d(\cos t)}{dt} - \sin t\frac{d(\sin t)}{dt} + \cos t\frac{dt}{dt})dt = \int_0^{2\pi} (-t\sin t - \sin t\cos t + \cos t)dt$$
$$= [t\cos t]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \cos tdt - \int_0^{2\pi} \sin t\cos tdt + \int_0^{2\pi} \cos tdt = 2\pi - [\frac{1}{2}\sin^2 t]_0^{2\pi} = 2\pi$$

On peut aussi retrouver ce résultat, en remarquant que la forme différentielle γ est exacte, en effet $\omega = df$ où $f(x,y,z) = xz - \frac{y^2}{2}$ par suite le théorème précédent nous donne:
$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma df = f(\gamma(2\pi)) - f(\gamma(0)) = f(1,0,2\pi) - f(1,0,0) = 2\pi.$$

7.2.13 Exercice Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer l'intégrale curviligne de la forme différentielle $\omega(x,\ y) = -ydx + xdy$ le long de $\gamma(t) = (t,\ t^n)$, $0 \le t \le 1$.

Le théorème suivant est une généralisation du théorème fondamental du calcul intégral

7.2.14 THÉORÈME (LE THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'INTÉGRALE CURVILIGNE) L'intégrale curviligne d'une forme différentielle exacte (ou totale) $\omega = df$ ne dépend que des extrémités $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$ de la courbe γ, on a :

$$\boxed{\int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))}$$

En particulier, si γ est une courbe fermée (c-à-d $\gamma(a) = \gamma(b)$) alors,

$$\boxed{\oint_\gamma df = 0}.$$

Démonstration: En donne la preuve pour le cas $n = 3$, la cas général s'obtient de la même manière. Par le théorème de dérivation des fonctions composées on a:

$$\int_\gamma df = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t), z(t))x'(t)dt + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t), z(t))y'(t)dt + \frac{\partial f}{\partial z}(x(t), y(t), z(t))z'(t)dt$$

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t), z(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t), z(t))y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z}(x(t), y(t), z(t))z'(t) \right) dt$$

$$= \int_a^b \frac{df(\gamma(t))}{dt}\, dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

■

7.2.1 Circulation (ou travail) d'un champ de vecteurs

Soit $\gamma : I = [a,\ b] \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée de classe C^1, et soit $V : \gamma([a,\ b]) \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs continu. D'un point de vue physique, on se représente $\gamma(t)$ comme étant la position d'une particule à l'instant t, qui se déplace sous l'influence du champ de forces $\overrightarrow{V}$ (ainsi $\overrightarrow{V}(\gamma(t))$ est la force agissant sur la particule à l'instant t). L'intégrale curviligne du champ de vecteurs le long de la courbe γ, notée $\int_\gamma V$, est par définition le travail effectué par ce champ de forces pour déplacer la particule le long de la courbe de $\gamma(a)$ à $\gamma(b)$. Mathématiquement, cela se traduit de la manière suivante

7.2.16 DÉFINITION

Soient $\overrightarrow{V} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $\gamma : [a,\ b] \to D \subset \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée.

On appelle **circulation (ou travail)** de $\overrightarrow{V}$ le long de γ l'intégrale curviligne

$$\boxed{\int_\gamma \overrightarrow{V} := \int_a^b \overrightarrow{V}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt}$$

où $\overrightarrow{V}(\gamma(t))$ indique que le champ $\overrightarrow{V}$ est évalué sur les points de la courbe et $\cdot$ désigne le produit scalaire entre vecteurs.

• Si γ est une courbe fermée, la circulation de $\overrightarrow{V}$ le long de γ s'écrit aussi

$$\oint_\gamma \overrightarrow{V}.$$

7.2.17 Remarque (importante)

Soit $\overrightarrow{V}$ un champ de vecteurs et ω la forme différentielle associée alors la circulation (ou travail) de $\overrightarrow{V}$ le long de toute courbe γ est égal à l'intégrale curviligne de ω le long de γ

$$\boxed{\int_\gamma \overrightarrow{V} = \int_\gamma \omega}$$

Les propriétés suivantes du travail d'un champ de vecteurs sont des traductions de celles de l'intégrale curviligne.

7.2.18 Proposition (Propriétés)

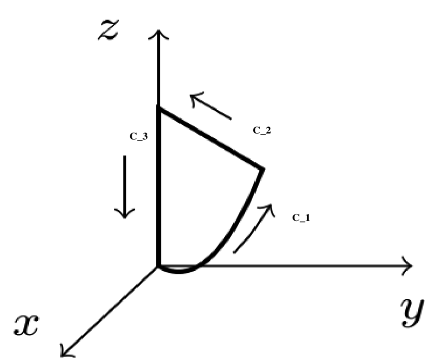
Les principales propriétés sont:

1) $\displaystyle\int_{-\gamma} \overrightarrow{V} = -\int_\gamma \overrightarrow{V}.$

2) $\displaystyle\int_\gamma (a\overrightarrow{V}_1 + b\overrightarrow{V}_2) = a\int_\gamma \overrightarrow{V}_1 + b\int_\gamma \overrightarrow{V}_2.$

3) $\displaystyle\int_{\gamma_1+\gamma_2} \overrightarrow{V} = \int_{\gamma_1} \overrightarrow{V} + \int_{\gamma_2} \overrightarrow{V}.$

7.2.19 Exemple. Calcul de la circulation du champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(x,\ y,\ z) = z\,\overrightarrow{i} - y\,\overrightarrow{j} + x\,\overrightarrow{k}$ le long de la courbe fermée $C^+ = C_1^+ \cup C_2^+ \cup C_3^+$



• La circulation du champ $\overrightarrow{V}(x,\ y,\ z) = z\overrightarrow{i} - y\overrightarrow{j} + x\overrightarrow{k}$ le long de la parabole $C_1^+ : \gamma_1(t) = (t, t, t^2)\ t \in [0,1]$
est :

$$\int_{C_1^+} \overrightarrow{V} \cdot d\gamma = \int_0^1 (t^2, -t, t) \cdot (1, 1, 2t)\, dt = \int_0^1 t^2 - t + 2t^2\, dt = \int_0^1 3t^2 - t\, dt = [t^3 - \frac{t^2}{2}]_0^1 = \frac{1}{2}$$

• La circulation de $\overrightarrow{V}(x,\ y,\ z) = z\overrightarrow{i} - y\overrightarrow{j} + x\overrightarrow{k}$ le long du segment C_2^+ : $\gamma_2(t) = (1-t, 1-t, 1)\ t \in [0,1]$ est :

$$\int_{C_2^+} \overrightarrow{V} = \int_0^1 (1, t-1, 1-t) \cdot (-1, -1, 0)\, dt = \int_0^1 -1 - (t-1)\, dt = \int_0^1 -t\, dt = [-\frac{t^2}{2}]_0^1 = -\frac{1}{2}.$$

• Enfin, la circulation de $\overrightarrow{V}(x,\ y,\ z) = z\overrightarrow{i} - y\overrightarrow{j} + x\overrightarrow{k}$ le long du segment $C_3^+ : \gamma_3(t) = (0, 0, 1-t)\ t \in [0,1]$ est :

$$\int_{C_3^+} \overrightarrow{V} = \int_0^1 (1-t, 0, 0) \cdot (0, 0, -1)\, dt = \int_0^1 0\, dt = 0$$

• En conclusion, la circulation de $\overrightarrow{V}$ le long de la courbe fermée $C^+ = C_1^+ \cup C_2^+ \cup C_3^+$ vaut:

$$\int_{C^+} \overrightarrow{V} = \int_{C_1^+} \overrightarrow{V} + \int_{C_2^+} \overrightarrow{V} + \int_{C_3^+} \overrightarrow{V} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 0 = 0.$$

7.2.20 Exercice Montrer que la circulation du champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(x,\ y) = (x^2y,\ y^3)$ le long du segment I d'origine $(0,0)$ et d'extrémité $(1,1)$ est égale à $\frac{1}{2}$.

7.2.2 Circulation (ou travail) d'un champ de gradient

7.2.21 DÉFINITION
Un champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ *est un* champ de gradient (ou dérive d'un potentiel) *s'il existe* f de classe C^2 *de* D *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *telle que* $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f$.

7.2.22 EXEMPLE. 1) $\overrightarrow{V}(x,\ y) = (y,\ x)$ est un champ de gradient sur $D = \mathbb{R}^2$, on peut prendre $f(x,y) = xy$.
2) $\overrightarrow{V}(x,y,z) = (y + z + \frac{1}{x}, x + z + \frac{1}{y}, x + y + \frac{1}{z})$ est un champ de gradient sur $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}$. En effet, $\overrightarrow{V}(x,y,z)$ est le gradient de la fonction $f(x,y,z) = xy + yz + zx + \ln(x) + \ln(y) + \ln(z)$ (à vérifier)

3) $\overrightarrow{V}(x,y,z) = (x,x,x)$ *n'est pas un champ de gradient. En effet,* $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{V}) = (0,1,1) \neq \overrightarrow{0}$.

7.2.23 Exercice Montrer que le champ de vecteurs

$$\overrightarrow{V}(x,y,z) = (ax+by+cz)\overrightarrow{i} + (dx+ey+fz)\overrightarrow{j} + (gx+hy+iz)\overrightarrow{k}$$

est irrotationnel sur $\mathbb{R}^3$ si et seulement si la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ est symétrique. Montrer que dans ce cas $\overrightarrow{V}$ est un champ de gradient.

Dans le cadre des champs de vecteurs, le théorème suivant est une traduction du théorème fondamental de l'intégrale curviligne

7.2.24 Théorème (le théorème fondamental des champs de gradients)
Soit $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f$ *un champ de gradient de domaine* D*, alors*

• *La circulation de* $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$ *le long d'une courbe* γ contenue dans D *joignant deux points* A *et* B *ne dépend pas de la courbe mais seulement des valeurs de* f aux points A et B (on dit qu'un champ de gradient est conservatif). On a

$$\int_\gamma \overrightarrow{\text{grad}}\, f = f(B) - f(A)\,.$$

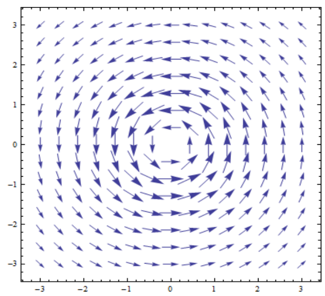
• En particulier, la circulation de $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f$ *le long d'une courbe fermée* C *est nulle*

$$\oint_\gamma \overrightarrow{\text{grad}}\, f = 0.$$

7.2.25 Exemple. Le champ vecteur $\overrightarrow{V}(x,\ y,\ z) = z\,\overrightarrow{i} - y\,\overrightarrow{j} + x\,\overrightarrow{k}$ est un champ de gradient. En effet, $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f$ où $f(x,y,z) = xz - \frac{y^2}{2}$, ainsi la circulation le long de la courbe fermée de l'exercice 7.2.19 est nulle (on retrouve facilement le résultat).

7.2.26 Exemple. Calculons la circulation du $\overrightarrow{V}(x,y,z) = (-y,x,0) = -y\,\overrightarrow{i} + x\,\overrightarrow{j}$ le long du cercle $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $t \in [0,2\pi]$, on aura

$$\oint_\gamma \overrightarrow{V} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0$$



Le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ tourne autour de l'origine

On en déduit que le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ n'est pas un champ de gradient, puisque sa circulation le long d'une courbe fermée n'est pas nulle.

On aurait pu aussi remarquer que, comme $\overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{V}) = \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} =$ $2\overrightarrow{k}$ n'est pas nul, $\overrightarrow{V}$ n'est pas un champ de gradient.

7.2.27 EXEMPLE. Maintenant, on va à partir du champ de l'exemple précédent, en modifiant son amplitude, obtenir **un champ de vecteurs irrotationnel mais qui n'est pas un champ de gradient.**

Ceci montre que la condition nécessaire ($\overrightarrow{\text{rot}} = \overrightarrow{0}$) pour avoir un champ de gradient n'est pas suffisante.

Soit $\overrightarrow{W}$ de classe C^1 défini sur $D = \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,z) | z \in \mathbb{R}\}$ par

$$\overrightarrow{W}(x,y,z) = \frac{-y}{x^2+y^2}\,\overrightarrow{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\,\overrightarrow{j} + 0\,\overrightarrow{k}.$$

1) $\overrightarrow{W}$ est irrotationnel car

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{W}) = \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{x^2+y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2+y^2} \right) \right) \overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}.$$

2) On va maintenant calculer le travail du champ $\overrightarrow{W}$ le long du cercle unité du plan xOy, orienté dans le sens trigonométrique. Une paramétrisation est donnée par $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, avec $\gamma(t) = (\cos t,\ \sin t, 0)$. On aura ainsi,

$$\oint_\gamma \overrightarrow{W} = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

On peut en déduire que $\overrightarrow{W}$ n'est pas un champ de gradient puisque sa circulation le long de la courbe fermée γ n'est pas nulle. Le champ de vecteurs $\overrightarrow{W}$ tourne autour de l'axe Oz qui n'est pas contenu dans le domaine D.

En fait, ici le domaine D est assez particulier, par exemple le centre du cercle γ n'est pas dans le domaine. On verra dans ce qui suit, que si le domaine "n'a pas de trous" alors la condition nécessaire ($\overrightarrow{\text{rot}} = \overrightarrow{0}$) est aussi suffisante.

7.2.28 Exercice Soit $\overrightarrow{V}(x,y) = (x^2+y^2, 2xy)$. Calculer l'intégrale curviligne de V le long des courbes suivantes:

1) $C_1: \ x = t,\ y = 2t,\ t \in [0,1]$

2) $C_2: \ x = t,\ y = 2t^2,\ t \in [0,1]$

3) $C = C_3 \cup C_4$ où $C_3: \ x = 0,\ y = t,\ t \in [0,2]$ et $C_4: \ x = t,\ y = 2,\ t \in [0,1]$

7.2.3 Primitive d'une forme différentielle (potentiel d'un champ de vecteurs)

On a vu (voir exemple 7.2.27) que la condition nécessaire ($\overrightarrow{\text{rot}} = \overrightarrow{0}$) pour qu'un champ de vecteurs sur un domaine D soit un champ de gradients n'est pas suffisante. Pour que pour cette condition nécessaire soit aussi suffisante, il faudrait que le domaine D "n'ait pas de trous" (on va donner dans ce qui suit une classe d'ensembles qui n'ont pas de trous).

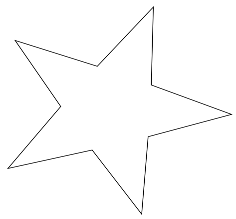
7.2.29 Définition

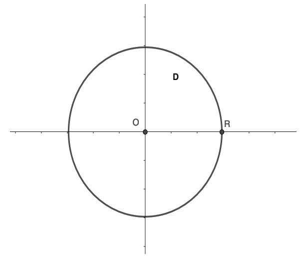
1) Soit ω une forme différentielle (de degré 1) sur D. Une primitive de ω est une fonction différentiable $\phi : D \to \mathbb{R}$ telle que $\omega = d\phi$.

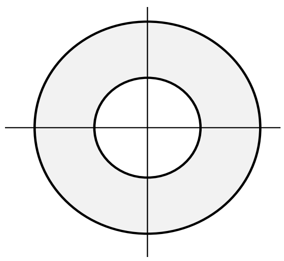
2) Soit $\overrightarrow{V}$ un champ de vecteurs sur D. Un potentiel de $\overrightarrow{V}$ est une fonction différentiable $\phi : D \to \mathbb{R}$ telle que $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi$.

7.2.30 Définition

Un sous-ensemble D de $\mathbb{R}^n$ est dit **étoilé** s'il existe un point $a \in D$ tel que pour tout point $p \in D$, le segment joignant a à p est contenu dans D.







ensemble étoilé ensemble convexe
ensemble non étoilé

On rappelle que le segment $[a, p]$ est par définition l'ensemble

$$[a, p] := \{a + t(p - a) \mid 0 \leq t \leq 1\}$$

7.2.31 EXEMPLE. 1) $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, pluds généralement $\mathbb{R}^n$ sont des ensembles étoilés.

2) tout disque dans $\mathbb{R}^2$ (resp. toute boule dans $\mathbb{R}^3$) est un ensemble étoilé.

3) tout ensemble convexe est étoilé (en fait, il est étoilé par rapport à chacun de ses points). Par exemple, $\mathbb{R}^n$, les triangles, tétraèdres, disques, boules sont des ensembles convexes, donc étoilés.

4) Les ensembles $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) | z \in \mathbb{R}\}$ ne sont pas étoilés.

7.2.32 THÉORÈME (DE POINCARÉ)
Soit D un domaine **étoilé** de $\mathbb{R}^3$.

1) Soit ω une forme différentielle sur D.
Alors ω est une forme différentielle totale si et seulement si ω est une forme différentielle fermée.

2) Soit $\overrightarrow{V}$ un champ de vecteurs sur D.
Alors $\overrightarrow{V}$ est un champ de gradient si et seulement si $\overrightarrow{V}$ est un champ irrotationnel.

Par exemple en dimension 3: Sur un domaine étoilé D de $\mathbb{R}^3$ on a

i) $\omega = R(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ *est une forme différentielle totale sur D si et seulement si*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

ii) $\overrightarrow{V} = R(x,y,z)\overrightarrow{i} + Q(x,y,z)\overrightarrow{j} + R(x,y,z)\overrightarrow{k}$ *un champ de vecteurs sur D.*
Alors $\overrightarrow{V}$ est un champ de gradient si et seulement si il est irrotationnel c-à-d si les équations suivantes sont satisfaites

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

7.2.33 Remarque

1) Cet enoncé est équivalent à : "sur un domaine étoilé D, une forme différentielle ω est exacte si et seulement si elle est fermée "

2) En terme de champs de vecteurs: "sur un domaine étoilé D, un champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ est un champ de gradient si et seulement si il est irrotationnel".

En dimension 2, le théorème de Poincaré s'énonce comme suit:
Soit D un domaine étoilé de $\mathbb{R}^2$.

1) Soit $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ une forme différentielle sur D.
Alors ω est une forme différentielle totale si et seulement si $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

2) Soit $\overrightarrow{V} = P(x,y)\overrightarrow{i} + Q(x,y)\overrightarrow{j}$ un champ de vecteurs sur D.
Alors $\overrightarrow{V}$ est un champ de gradient si et seulement si $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Démonstration: On donne la preuve en dimension 3, le cas général s'obtient sans difficultés en suivant les mêmes étapes.

On a déjà vu que les équations i sont nécessaires, il reste à montrer qu'elles sont suffisantes, on doit construire une primitive f de

$$\omega = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz \text{ sur } D.$$

On peut supposer que D est étoilé par rapport à l'origine, en ce ramène à ce cas par translation. Comme D est étoilé par rapport à l'origine pour tout $(x,y,z) \in D$ et tout $t \in [0,1]$, $t(x,y,z) = (tx,ty,tz) \in D$. On définit alors, l'application $\varphi : D \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\varphi((x,y,z),t) = x.P(tx,ty,tz) + y.Q(tx,ty,tz) + z.R(tx,ty,tz).$$

La formule de dérivation d'une fonction composée donne:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}((x,y,z),t) = P(tx,ty,tz) + tx\frac{\partial P}{\partial x}(tx,ty,tz) + ty\frac{\partial Q}{\partial x}(tx,ty,tz) + tz\frac{\partial R}{\partial x}(tx,ty,tz).$$

Comme

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$$

On obtient

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}((x,y,z),t) = P(tx,ty,tz) + tx\frac{\partial P}{\partial x}(tx,ty,tz) + ty\frac{\partial P}{\partial y}(tx,ty,tz) + tz\frac{\partial P}{\partial z}(tx,ty,tz) = \frac{d(t.P(tx,ty,tz))}{dt}$$

On trouve de la même manière que $\frac{\partial\varphi}{\partial y}((x,y,z),t) = \frac{d(t.Q(tx,ty,tz))}{dt}$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial z}((x,y,z),t) = \frac{d(t.R(tx,ty,tz))}{dt}$.

On introduit alors la fonction $f : D \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = \int_0^1 \varphi((x,y,z),t)dt$.

Nous allons montrer que ω est la différentielle de f.

On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \int_0^1 \frac{\partial\varphi}{\partial x}((x,y,z),t)dt = \int_0^1 \frac{d(t.P(tx,ty,tz))}{dt}dt = [t.P(tx,ty,tz)]_0^1 =$ $P(x,y,z)$ de même on aura $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = Q(x,y,z)$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = R(x,y,z)$ ainsi $\omega = df$ i.e. f est une primitive de ω sur D. ■

Maintenant, si on a un champ de vecteurs irrotationnel défini sur un domaine étoilé, d'après le théorème de Poincaré, c'est un champ de gradients. Comment déterminer un potentiel de ce champ?

On va donner deux méthodes pour déterminer un potentiel. Les méthodes s'appliquent aussi à la recherche d'une primitive pour une forme différentielle fermée.

7.2.4 Méthode pour déterminer une primitive d'une forme différentielle (ou un potentiel d'un champ de vecteurs)

Soit $\overrightarrow{V}(x,y,z) = a(x,y,z)\overrightarrow{i} + b(x,y,z)\overrightarrow{j} + c(x,y,z)\overrightarrow{k}$ *tel que* $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{V} = 0$ *et cherchons* ϕ *tel que* $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\phi$ *c-à-d* $\frac{\partial \phi}{\partial x} = a$, $\frac{\partial \phi}{\partial y} = b$ *et* $\frac{\partial \phi}{\partial z} = c$.

On a $\frac{\partial \phi}{\partial x} = a \implies \phi(x, y, z) = \int a(x, y, z)dx + g(y, z)$
puis
$\frac{\partial \phi}{\partial y} = b \implies b = \int \frac{\partial a}{\partial y}dx + \frac{\partial g}{\partial y} \implies \frac{\partial g}{\partial y} = b - \int \frac{\partial a}{\partial y}dx \implies g = \int bdy - \iint \frac{\partial a}{\partial y}dxdy + h(z)$ *et donc* $\phi(x, y, z) = \int adx + \int bdy - \iint \frac{\partial a}{\partial y}dxdy + h(z)$.

Enfin, $\frac{\partial \phi}{\partial z} = c \implies c = \int \frac{\partial a}{\partial z}dx + \int \frac{\partial b}{\partial z}dy - \iint \frac{\partial^2 a}{\partial z \partial y}dxdy + \frac{\partial h}{\partial z}$

$$\implies \frac{\partial h}{\partial z} = c - \int \frac{\partial a}{\partial z}dx - \int \frac{\partial b}{\partial z}dy + \iint \frac{\partial^2 a}{\partial z \partial y}dxdy$$

d'où
$h = \int cdz - \iint \frac{\partial a}{\partial z}dxdz - \iint \frac{\partial b}{\partial z}dydz + \iiint \frac{\partial^2 a}{\partial z \partial y}dxdydz$. *On remplace* h *dans* $\phi(x, y, z) = \int adx + \int bdy - \iint \frac{\partial a}{\partial y}dxdy + h(z)$ *pour obtenir finalement :*

$$\phi(x, y, z) = \int adx + \int bdy + \int cdz - \int \left(\int \frac{\partial a}{\partial y}dx\right) dy - \int \left(\int \frac{\partial a}{\partial z}dx\right) dz - \int \left(\int \frac{\partial b}{\partial z}dy\right) dz$$
$$+ \int \left(\int \left(\int \frac{\partial^2 a}{\partial z \partial y}dx\right) dy\right) dz.$$

7.2.35 Exemple. Soit $\overrightarrow{V} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par

$$\overrightarrow{V}(x,y,z) = 2xy\,\overrightarrow{i} + (x^2 + z)\,\overrightarrow{j} + y\,\overrightarrow{k}$$

Un simple calcul montre que $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{V} = 0$ et puisque $D = \mathbb{R}^3$ est convexe donc étoilé, le théorème de Poincaré assure l'existence de $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\ \phi$.

1) **Par integration du système:** $\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = 2xy \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = x^2 + z \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial z} = y \end{cases}$

On a $\dfrac{\partial \phi}{\partial x} = 2xy \Rightarrow \phi(x,\ y,\ z) = \displaystyle\int 2xydx + g(y,\ z) = x^2y + g(y,\ z)$. On en déduit $\frac{\partial \phi}{\partial y} = x^2 + \frac{\partial g}{\partial y}$ et $\frac{\partial \phi}{\partial y} = x^2 + z$ ce qui impose donc $\dfrac{\partial g}{\partial y}(y,\ z) = z$ d'où $g(y,\ z) = \displaystyle\int zdy + h(z) = zy + h(z)$. En reportant dans l'expression de ϕ on obtient

$$\phi(x,y,z) = x^2y + zy + h(z)\ .$$

Ainsi $\dfrac{\partial \phi}{\partial z} = y + h'(z)$. La troisième équation impose $\dfrac{\partial \phi}{\partial z} = y$ d'où $h'(z) = 0$ c-à-d h est constante. On peut choisir cette constante égale à 0 car

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\phi + Cte)\ .$$

Finalement, $\phi(x,y,z) = x^2y + zy$ convient.

2) **En utilisant la fonction donnée dans la preuve du théorème de Poincaré:**

On pose

$$\begin{aligned} \varphi((x,y,z),t) &= x.P(tx,ty,tz) + y.Q(tx,ty,tz) + z.R(tx,ty,tz) \\ &= 2t^2x^2y + (t^2x^2y + tzy) + tyz = 3t^2x^2y + 2tyz. \end{aligned}$$

Alors,

$$\phi(x,y,z) = \int_0^1 \varphi((x,y,z),t)dt = \int_0^1 (3t^2x^2y + 2tyz)dt = \left[t^3x^2y + t^2yz\right]_0^1 = x^2y + yz,$$

est un potentiel de $\overrightarrow{V}$.

7.2.36 Exemple. Soit $\omega = \dfrac{-y}{x^2+y^2}dx + \dfrac{x}{x^2+y^2}dy$ définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

i) ω est fermée car $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}\right) = \dfrac{y^2-x^2}{x^2+y^2)^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$

ii) ω n'est pas exacte car, si γ est la courbe paramétrée fermée, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ on a

$$\oint_{\gamma^+} \omega = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0.$$

Comme $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ n'est pas étoilé, le théorème de Poincaré ne s'applique pas dans ce cas. Par contre, si on restreint ω au domaine $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \leq 0\}$, qui lui est étoilé, le théorème de Poincaré permet d'affirmer que ω admet une primitive sur D.

En effet, $\omega = df$ où $f : D \to \mathbb{R}$ est la fonction définie par $f(x,y) = 2\arctan\left(\dfrac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.