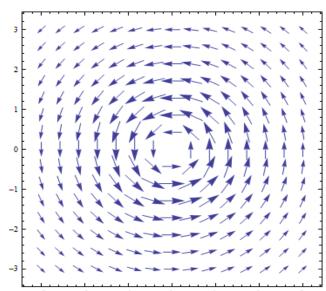
7.2.25 EXEMPLE. Le champ vecteur $\overrightarrow{V}(x,\ y,\ z) = z\,\overrightarrow{i} - y\,\overrightarrow{j} + x\,\overrightarrow{k}$ est un champ de gradient. En effet, $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f$ où $f(x,y,z) = xz - \frac{y^2}{2}$, ainsi la circulation le long de la courbe fermée de l'exercice 7.2.19 est nulle (on retrouve facilement le résultat).

7.2.26 EXEMPLE. Calculons la circulation du $\overrightarrow{V}(x,y,z) = (-y,x,0) = -y\,\overrightarrow{i} + x\,\overrightarrow{j}$ le long du cercle $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $t \in [0,2\pi]$, on aura

$$\oint_\gamma \overrightarrow{V} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0$$



Le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ tourne autour de l'origine

On en déduit que le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ n'est pas un champ de gradient, puisque sa circulation le long d'une courbe fermée n'est pas nulle.

On aurait pu aussi remarquer que, comme $\overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{V}) = \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} = 2\,\overrightarrow{k}$ n'est pas nul, $\overrightarrow{V}$ n'est pas un champ de gradient.

7.2.27 EXEMPLE. Maintenant, on va à partir du champ de l'exemple précédent, en modifiant son amplitude, obtenir un champ de vecteurs irrotationnel mais qui n'est pas un champ de gradient.

Ceci montre que la condition nécessaire ($\overrightarrow{\text{rot}} = \overrightarrow{0}$) pour avoir un champ de gradient n'est pas suffisante.

Soit $\overrightarrow{W}$ de classe $C^1$ défini sur $D = \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,z) | z \in \mathbb{R}\}$ par

$$\overrightarrow{W}(x,y,z) = \frac{-y}{x^2+y^2}\,\overrightarrow{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\,\overrightarrow{j}.$$

1) $\overrightarrow{W}$ est irrotationnel car

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{W}) = \det\begin{pmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\right)\overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}.$$

2) On va maintenant calculer le travail du champ $\overrightarrow{W}$ le long du cercle unité du plan $xOy$, orienté dans le sens trigonométrique. Une paramétrisation est donnée par $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, avec $\gamma(t) = (\cos t,\ \sin t, 0)$. On aura ainsi,

$$\oint_\gamma \overrightarrow{W} = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

On peut en déduire que $\overrightarrow{W}$ n'est pas un champ de gradient puisque sa circulation le long de la courbe fermée $\gamma$ n'est pas nulle. Le champ de vecteurs $\overrightarrow{W}$ tourne autour de l'axe $Oz$ qui n'est pas contenu dans le domaine $D$.

En fait, ici le domaine $D$ est assez particulier, par exemple le centre du cercle $\gamma$ n'est pas dans le domaine. On verra dans ce qui suit, que si le domaine "n'a pas de trous" alors la condition nécessaire ($\overrightarrow{\mathrm{rot}} = \overrightarrow{0}$) est aussi suffisante.

7.2.28 Exercice Soit $\overrightarrow{V}(x, y) = (x^2 + y^2, 2xy)$. Calculer l'intégrale curviligne de $V$ le long des courbes suivantes:

1) $C_1 :\ x = t,\ y = 2t,\ t \in [0, 1]$

2) $C_2 :\ x = t,\ y = 2t^2,\ t \in [0, 1]$

3) $C = C_3 \cup C_4$ où $C_3 :\ x = 0,\ y = t,\ t \in [0, 2]$ et $C_4 :\ x = t,\ y = 2,\ t \in [0, 1]$

### 7.2.3 Primitive d'une forme différentielle (potentiel d'un champ de vecteurs)

*On a vu ( voir exemple 7.2.27) que la condition nécessaire ($\overrightarrow{\mathrm{rot}} = \overrightarrow{0}$) pour qu'un champ de vecteurs sur un domaine $D$ soit un champ de gradients n'est pas suffisante. Pour que pour cette condition nécessaire soit aussi suffisante, il faudrait que le domaine $D$ "n'ait pas de trous" ( on va donner dans ce qui suit une classe d'ensembles qui n'ont pas de trous).*

7.2.29 Définition

1) Soit $\omega$ une forme différentielle ( de degré 1) sur $D$. Une primitive de $\omega$ est une fonction différentiable $\phi : D \to \mathbb{R}$ telle que $\omega = d\phi$.

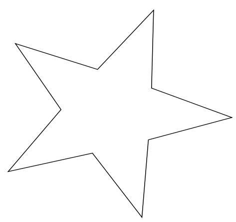
2) Soit $\overrightarrow{V}$ un champ de vecteurs sur $D$. Un potentiel de $\overrightarrow{V}$ est une fonction différentiable $\phi : D \to \mathbb{R}$ telle que $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$.

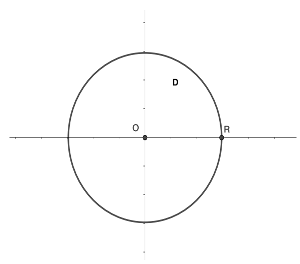
---

7.2.30 DÉFINITION
Un sous-ensemble $D$ de $\mathbb{R}^n$ est dit **étoilé** s'il existe un point $a \in D$ tel que pour tout point $p \in D$, le segment joignant $a$ à $p$ est contenu dans $D$.

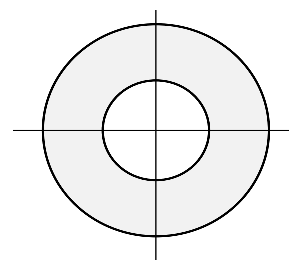
On rappelle que le segment $[a, p]$ est par définition l'ensemble

$$[a, p] := \{a + t(p - a) \mid 0 \leq t \leq 1\}$$


ensemble étoilé



ensemble convexe


ensemble non étoilé

7.2.31 EXEMPLE. 1) $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, pluds généralement $\mathbb{R}^n$ sont des ensembles étoilés.

2) tout disque dans $\mathbb{R}^2$ (resp. toute boule dans $\mathbb{R}^3$) est un ensemble étoilé.

3) tout ensemble convexe est étoilé ( en fait, il est étoilé par rapport à chacun de ses points). Par exemple, $\mathbb{R}^n$, les triangles, tétraèdres, disques, boules sont des ensembles convexes, donc étoilés.

4) Les ensembles $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) | z \in \mathbb{R}\}$ ne sont pas étoilés.

---

7.2.32 THÉORÈME (DE POINCARÉ)
Soit $D$ un domaine *étoilé* de $\mathbb{R}^3$.

1) Soit $\omega = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ une forme différentielle sur $D$. Alors $\omega$ est une forme différentielle totale si et seulement si les équations suivantes sont satisfaites

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

2) Soit $\overrightarrow{V} = R(x,y,z)\overrightarrow{i} + Q(x,y,z)\overrightarrow{j} + R(x,y,z)\overrightarrow{k}$ un champ de vecteurs sur $D$. Alors $\overrightarrow{V}$ est un champ de gradient si et seulement si il est irrotationnel c-à-d si les équations suivantes sont satisfaites

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

---

**7.2.33 REMARQUE**

1) Cet enoncé est équivalent à : "sur un domaine étoilé $D$, une forme différentielle $\omega$ est exacte si et seulement si elle est fermée "

2) En terme de champs de vecteurs: "sur un domaine étoilé $D$, un champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ est un champ de gradient si et seulement si il est irrotationnel".

*L'énonce en dimension* 2 :

**7.2.34 THÉORÈME (DE POINCARÉ)**

Soit $D$ un domaine *étoilé* de $\mathbb{R}^2$.

1) Soit $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ une forme différentielle sur $D$.
Alors $\omega$ est une forme différentielle totale si et seulement si $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

2) Soit $\overrightarrow{V} = P(x,y)\overrightarrow{i} + Q(x,y)\overrightarrow{j}$ un champ de vecteurs sur $D$.
Alors $\overrightarrow{V}$ est un champ de gradient si et seulement si $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

---

*Démonstration:* (en dimension 3) On a déjà vu que les équations 1 sont nécessaires, il reste à montrer qu'elles sont suffisantes, on doit construire une primitive $f$ de $\omega = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ sur $D$. On peut supposer que $D$ est étoilé par rapport à l'origine, en ce ramène à ce cas par translation. Comme $D$ est étoilé par rapport à l'origine pour tout $(x,y,z) \in D$ et tout $t \in [0,1]$, $t(x,y,z) = (tx,ty,tz) \in D$. On définit alors, l'application $\varphi : D \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\varphi((x,y,z),t) = x.P(tx,ty,tz) + y.Q(tx,ty,tz) + z.R(tx,ty,tz).$$

La formule de dérivation d'une fonction composée donne:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}((x,y,z),t) = P(tx,ty,tz) + tx\frac{\partial P}{\partial x}(tx,ty,tz) + ty\frac{\partial Q}{\partial x}(tx,ty,tz) + tz\frac{\partial R}{\partial x}(tx,ty,tz).$$

Comme

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$$

On obtient

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}((x,y,z),t) = P(tx,ty,tz) + tx\frac{\partial P}{\partial x}(tx,ty,tz) + ty\frac{\partial P}{\partial y}(tx,ty,tz) + tz\frac{\partial P}{\partial z}(tx,ty,tz) = \frac{d(t.P(tx,ty,tz))}{dt}$$

On trouve de la même manière que $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}((x,y,z),t) = \dfrac{d(t.Q(tx,ty,tz))}{dt}$ et $\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}((x,y,z),t) = \dfrac{d(t.R(tx,ty,tz))}{dt}$.

On introduit alors la fonction $f : D \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = \int_0^1 \varphi((x,y,z),t)dt$. Nous allons montrer que $\omega$ est la différentielle de $f$.
On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x}((x,y,z),t)dt = \int_0^1 \frac{d(t.P(tx,ty,tz))}{dt}dt = [t.P(tx,ty,tz)]_0^1 = P(x,y,z)$ de même on aura $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = Q(x,y,z)$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = R(x,y,z)$ ainsi $\omega = df$ i.e. $f$ est une primitive de $\omega$ sur $D$. ■

*Maintenant, si on a un champ de vecteurs irrotationnel sur un domaine étoilé, d'après le théorème de Poincaré, c'est un champ de gradients. Comme déterminer un potentiel de ce champ?*

*On a va donner deux méthodes pour déterminer un potentiel. Les méthodes s'appliquent aussi à la recherche d'une primitive pour une forme différentielle fermée.*

7.2.36 Exemple. Soit $\overrightarrow{V} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par

$$\overrightarrow{V}(x,y,z) = 2xy\overrightarrow{i} + (x^2+z)\overrightarrow{j} + y\overrightarrow{k}$$

Un simple calcul montre que $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{V} = 0$ et puisque $D = \mathbb{R}^3$ est convexe donc étoilé, le théorème de Poincaré assure l'existence de $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\ \phi$.

1) **Par integration du système:** $\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = 2xy \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = x^2 + z \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} = y \end{cases}$

On a $\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2xy \Rightarrow \phi(x,\ y,\ z) = \int 2xydx + g(y,\ z) = x^2y + g(y,\ z)$. On en déduit $\frac{\partial \phi}{\partial y} = x^2 + \frac{\partial g}{\partial y}$ et $\frac{\partial \phi}{\partial y} = x^2 + z$ ce qui impose donc $\frac{\partial g}{\partial y}(y,\ z) = z$ d'où $g(y,\ z) = \int zdy + h(z) = zy + h(z)$. En reportant dans l'expression de $\phi$ on obtient

$$\phi(x,y,z) = x^2y + zy + h(z)\ .$$

Ainsi $\frac{\partial \phi}{\partial z} = y + h'(z)$ . La troisième équation impose $\frac{\partial \phi}{\partial z} = y$ d'où $h'(z) = 0$ c-à-d $h$ est constante. On peut choisir cette constante égale à 0 car

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,\phi = \overrightarrow{\text{grad}}\,(\phi + Cte)\ .$$

Finalement, $\phi(x,y,z) = x^2y + zy$ convient.

2) **En utilisant la fonction donnée dans la preuve du théorème de Poincaré:**

On pose

$$\varphi((x,y,z),t) = x.P(tx,ty,tz) + y.Q(tx,ty,tz) + z.R(tx,ty,tz)$$

$$= 2t^2x^2y + (t^2x^2y + tzy) + tyz = 3t^2x^2y + 2tyz.$$

Alors,

$$\phi(x,y,z) = \int_0^1 \varphi((x,y,z),t)dt = \int_0^1 (3t^2x^2y + 2tyz)dt = \left[t^3x^2y + t^2yz\right]_0^1 = x^2y + yz,$$

est un potentiel de $\overrightarrow{V}$.

7.2.37 Exemple. Soit $\omega = \dfrac{-y}{x^2+y^2}dx + \dfrac{x}{x^2+y^2}dy$ définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

i) $\omega$ est fermée car $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}\right) = \dfrac{y^2-x^2}{x^2+y^2)^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$

ii) $\omega$ n'est pas exacte car, si $\gamma$ est la courbe paramétrée fermée, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ on a

$$\oint_{\gamma^+} \omega = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0.$$

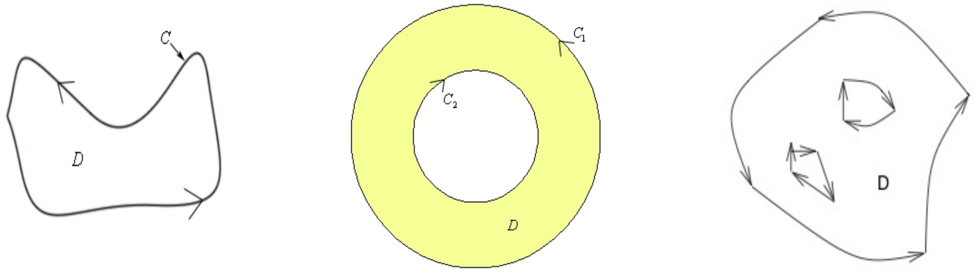
Comme $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ n'est pas étoilé, le théorème de Poincaré ne s'applique pas dans ce cas. Par contre, si on restreint $\omega$ au domaine $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \leq 0\}$, qui lui est étoilé, le théorème de Poincaré permet d'affirmer que $\omega$ admet une primitive sur $D$.

En effet, $\omega = df$ où $f : D \to \mathbb{R}$ est la fonction définie par $f(x,y) = 2\arctan\left(\dfrac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.

## 7.3 Formule de Green-Riemann

*On a vu que pour $\overrightarrow{V}$ un champ de gradient (ou $\omega$ une forme différentielle exacte ), pour toute courbe fermée $\gamma$, $\oint_\gamma \overrightarrow{V} = 0$ (resp. $\oint_\gamma \omega = 0$)*
*Pour un champ de vecteurs qui n'est pas un champ de gradient, en général, cette intégrale curviligne n'est pas nulle, la formule de Green-Riemann que nous allons voir, montre (entre autre) que l'intégrale d'un champ de vecteurs le long d'une courbe fermée simple qui borde un domaine du plan s'écrit comme une intégrale double sur le domaine délimité par cette courbe.*

7.3.1 Définition
Si $D$ est un domaine du **plan**, dont le bord est formé d'un nombre $k$ de courbes simples et fermées $C_1, \ldots, C_k$, on oriente son bord suivant la convention de la matière à gauche:
" lorsque l'on parcourt n'importe qu'elle courbe $C_i$ du bord on doit avoir le domaine $D$ sur sa gauche".
On dit dans ce cas que le bord $\partial D$ de $D$ est orienté dans le sens direct (ou positif).




*Les domaines que nous considérons pour l'énoncé du Théorème de Green-Riemann seront de cette forme, un tel domaine sera appelé "domaine admissible".*

### 7.3.2 Théorème (Green-Riemann)

1) Soit $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ une forme différentielle de classe $C^1$ définie sur un domaine admissible $D$ du plan. On suppose que son bord $\partial D^+$ est orienté dans le sens direct.

   Alors
$$\int_{\partial D^+} \omega = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \quad \text{(Formule de Green-Riemann).}$$

   La version équivalente pour les champs de vecteurs:

2) Soit $\overrightarrow{V}(x,y) = P(x,y)\overrightarrow{i} + Q(x,y)\overrightarrow{j}$ un champ de vecteurs de classe $C^1$ défini sur un domaine admissible $D$ du plan On suppose que son bord $\partial D$ est orienté dans le sens direct. Alors
$$\int_{\partial D^+} \overrightarrow{V} = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \quad \text{(Formule de Green-Riemann).}$$