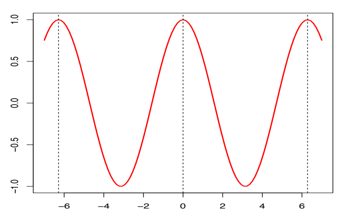
Chapter 7

Intégrale curviligne

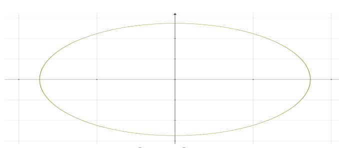
7.1 Courbes paramétrées

Il existe plusieurs façons mathématiques de décrire formellement la notion de courbe. En voilà trois:

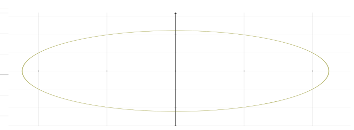
• *au moyen des graphes de fonctions d'une variable*



• *au moyen d'équations implicites: on parle alors de courbes définies implicitement*

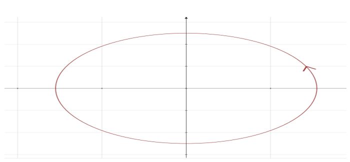


$x^2 + y^2 = 1$

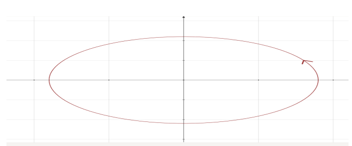


$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

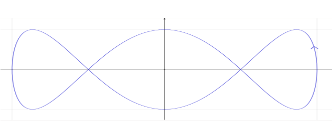
• *au moyen d'un paramètre, le temps t: on parle alors de courbes paramétrées*



$x(t) = \cos t, y(t) = \sin t$



$x(t) = a\cos t, y(t) = b\sin t$



$x(t) = \cos t, y(t) = \sin 3t$

Dans ce chapitre, on donne la préférence aux courbes paramétrées (dans l'espace, le cas des courbes planes s'en déduit facilement).

7.1.1 DÉFINITION

Une **courbe paramétrée** est une fonction vectorielle (de classe C^1)

$$\begin{array}{rcl}\gamma : [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & (x(t), y(t), z(t))\end{array}$$

Le **support** de la courbe paramétrée est le lieu des points

$$C = \{\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) |\ t \in [a,b] \subset \mathbb{R}\},$$

• Une courbe paramétrée est naturellement **orientée** par le sens croissant du paramètre t. On note dans ce cas le support par C^+ et on dit qu'il est orienté dans le sens direct (ou positif).
• Le support de γ **parcouru dans le sens inverse** (ou négatif) est noté $-\gamma$ (son support est noté C^-) il est par exemple paramétré par $\tilde{\gamma} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(a+b-t)$.
• On dit que la courbe γ est **fermée** si $\gamma(a) = \gamma(b)$ où $I = [a,\ b]$ • On dit que la courbe γ est **fermée** lorsque son origine coïncide avec son extrémité si $I = [a,\ b]$ et $\gamma(a) = \gamma(b)$.
• On dit que la courbe γ est **simple** lorsque $I = [a,\ b]$, $t, t' \in]a,b[$,

$$t \neq t' \implies \gamma(t) \neq \gamma(t').$$

• On appelle **vecteur vitesse** la dérivée première de γ:

$$\gamma'(t) = \frac{d\gamma(t)}{dt} = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

7.1.2 DÉFINITION

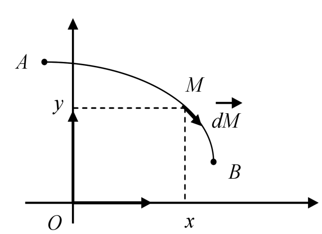
Une courbe paramétrée $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est dite **régulière** si pour tout $t \in I$,

$$\|\gamma'(t)\| \neq 0$$

autrement dit, si son vecteur vitesse ne s'annule jamais. La droite passant par $\gamma(t)$ et de vecteur directeur $\gamma'(t)$ est appelée la **droite tangente** en t à γ.

Longueur de courbe paramétrée

Soit un arc de courbe AB. On considère un point M qui se déplace le long de la courbe de A à B, par déplacements infinitésimaux $\overrightarrow{AB}$.



Chacun de ces déplacements a une longueur égale à $\|\overrightarrow{dM}\|$, et la longueur totale L de l'arc $\widehat{AB}$ est la somme de ces longueurs infinitésimales. Donc

$$\mathrm{L} = \int_A^B \|\overrightarrow{dM}\|$$

Si on travaille en coordonnées cartésiennes, on a

$$\overrightarrow{dM} = dx\,\overrightarrow{i} + dy\,\overrightarrow{j} + dz\,\overrightarrow{k}.$$

Il en résulte immédiatement que,

$$L_A^B = \int_A^B \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée joignant $A = \gamma(t_0)$ et $B = \gamma(t_1)$, comme $dx = x'(t)dt$, $dy = y'(t)dt$, $dz = z'(t)dt$ alors

$$L_A^B = \int_A^B \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt.$$

Ainsi **la longueur de** γ **entre** A **et** B est donnée par la formule

$$\boxed{L_A^B(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \|\gamma'(t)\| dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt}$$

7.1.3 EXEMPLE. Soit $\gamma(t) = (t, t, t)$ avec $t \in [0,\ 1]$.
Puisque $\gamma(t) = (t,\ t,\ t)$, on a $\gamma'(t) = (1, 1, 1)$ d'où

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3} \neq 0.$$

Ainsi γ est régulière.

7.1.4 EXEMPLE. Soit $\gamma(t) = (3\cos t, 0, 2\sin t)$ avec $t \in [0, 2\pi]$. On a $x(t)/3 = \cos t$, $y(t) = 0$ et $z(t)/2 = \sin t$, ainsi le support de la courbe est l'ellipse contenue dans le plan $\{y = 0\}$.

$$\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$$

Puisque $\gamma(t) = (3\cos t,\ 0, 2\sin t)$, on a

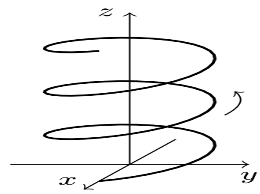
$$\gamma'(t) = (-3\sin t,\ 0, 2\cos t)$$

d'où

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{9\sin^2 t + 4\cos^2 t} \neq 0$$

Ainsi γ est régulière.

7.1.5 EXEMPLE. Soit $\gamma(t) = (\cos t, \sin t,\ t)$ avec $t \in [0,\ 6\pi]$.
On a $x^2(t) + y^2(t) = 1$, le support de la courbe est contenue dans un cylindre de base un cercle unité. La hauteur $z(t)$ est le paramètre angulaire. Le support de la courbe est donc une hélice.



Puisque $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, on a $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, t)$ par suite

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

ainsi la courbe γ est régulière.

- La longueur de γ entre 0 et 2π vaut

$$L_0^{2\pi}(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}dt = 2\sqrt{2}\pi$$

7.2 Intégrales curvilignes d'une forme différentielle et circulation d'un champ de vecteurs

On va définir maintenant les objets à intégrer.

7.2.1 DÉFINITION
Une **forme différentielle** (de degré 1) sur un domaine D est une expression de la forme :

1. (en dimension $n = 2$): $\omega(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ où P et Q sont des fonctions de classe C^1 de $D \subset \mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

2. (en dimension $n = 3$): $\omega(x, y, z) = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$ où P, Q et R sont des fonctions de classe C^1 de $D \subset \mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

7.2.2 EXEMPLE. Soient D un domaine de $\mathbb{R}^3$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Alors sa différentielle

$$df(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)\, dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)\, dz$$

est une forme différentielle (de degré 1) sur le domaine D.

7.2.3 DÉFINITION
On associe à la forme différentielle ω le **champ de vecteurs** $\overrightarrow{V}$ défini sur D par:

1. $\overrightarrow{V}(x,y) = P(x,y)\overrightarrow{i} + Q(x,y)\overrightarrow{j}$ (en dimension $n = 2$)
2. $\overrightarrow{V}(x,y,z) = P(x,y,z)\overrightarrow{i} + Q(x,y,z)\overrightarrow{j} + R(x,y,z)\overrightarrow{k}$ (en dimension $n = 3$)

7.2.4 Remarque

Le champ de vecteur associé à la différentielle df est le gradient $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$.

7.2.5 Définition

1) La forme différentielle ω est dite **exacte** (ou **totale**) s'il existe une fonction f de classe C^2 de D dans $\mathbb{R}$ telle que $\omega = df$ i.e. $\omega = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)dz$ (c'est la différentielle d'une fonction)

   et la version correspondante pour les champs de vecteurs :

2) Un champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ est un **champ de gradient (ou dérive d'un potentiel)** s'il existe une fonction f de classe C^2 de D dans $\mathbb{R}$ telle que $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f$ i.e.

$$\overrightarrow{V} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\overrightarrow{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\overrightarrow{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\overrightarrow{k}$$

7.2.6 Définition

1) Une fome différentielle $\omega = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ est dite **fermée** si $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $\dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial y}$.

2) Un champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ est dit **irrotationnel** sur D si son rotationnel est nul ($\overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{V}) = \overrightarrow{0}$) sur D.

   où $\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{V} = \left(\dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z}\right)\overrightarrow{i} + \left(\dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x}\right)\overrightarrow{j} + \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\overrightarrow{k}}$

   que nous pouvons écrire formellement $\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{V} = \det\begin{pmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix}}$

7.2.7 Remarque (importante)

Une condition **nécessaire** pour qu'une forme différentielle $\omega = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ soit exacte (resp. pour qu'un champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(x,y,z) = (P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z))$ soit un champ de gradient) est qu'elle soit fermée (resp. qu'il soit irrotationnel).

C'est une application du lemme de Schwarz, qui dit que pour une fonction de classe C^2, les dérivée partielles secondes ne dépendent pas de l'ordre de dérivation:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}.$$

Cette condition n'est en général suffisante.

7.2.8 Définition (Intégrale curviligne)

L'**intégrale curviligne** d'une forme différentielle de classe C^1, $\omega = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ le long de la courbe γ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ $, t \in [a,b]$

est le nombre réel :

$$\boxed{\int_\gamma \omega = \int_a^b \big(P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\big)\, dt}$$

La version en dimension 2, s'obtient en ôtant la variable z et la composante R c-à-d:

$$\boxed{\int_\gamma \omega = \int_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b \big(P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)\big)\, dt}$$

où γ est de représentation paramétrique $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $, \ t \in [a,b]$.

Si γ est une courbe **fermée** (c-à-d $\gamma(a) = \gamma(b)$), on notera aussi dans ce cas, l'intégrale curviligne de ω le long de la courbe γ par

$$\oint_\gamma \omega$$

7.2.9 Exemple.

Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ la courbe définie par $\gamma(t) = (2t+1, t, 3t-1)$ et $\omega = -zdx + xdy + ydz$. On va calculer l'intégrale curviligne $\int_\gamma \omega$.

On a $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) = (2,1,3)$ et par suite

$\int_\gamma \omega = \int_0^1 (-(3t-1)(2) + (2t+1)(1) + t(3))dt = \int_0^1 (-t+3)dt = \frac{5}{2}$.

7.2.10 Proposition

L'intégrale curviligne d'une forme différentielle le long d'une courbe ne dépend que de l'orientation, pas du choix de paramétrisations équivalentes.

7.2.11 Proposition (Propriétés des intégrales curvilignes)

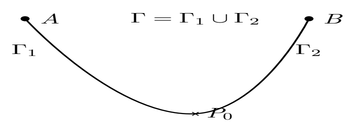
1. Si on note par $-\gamma$ la courbe γ parcourue dans le sens inverse, alors:

$$\int_{-\gamma} \omega = -\int_\gamma \omega.$$

2. Soient ω_1 et ω_2 deux formes différentielles, a et b deux nombres réels, alors

$$\int_\gamma a\omega_1 + b\omega_2 = a\int_\gamma \omega_1 + b\int_\gamma \omega_2.$$

3. (Relation de Chasles) Soit P_0 un point de la courbe Γ, à partir de P_0 on décompose Γ en deux courbes d'extrémités P_0, notons les Γ_1 et Γ_2, alors: $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ et $\int_\Gamma \omega = \int_{\Gamma_1\cup\Gamma_2} \omega = \int_{\Gamma_1} \omega + \int_{\Gamma_2} \omega$.



7.2.12 EXEMPLE. L'intégrale curviligne de la forme différentielle $\omega(x, y, z) = zdx - ydy + xdz$ le long de l'arc d'hélice $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ avec $t \in [0,\ 2\pi]$ est égale à: $\int_\gamma \omega =$

$$\int_0^{2\pi} (t\frac{d(\cos t)}{dt} - \sin t\frac{d(\sin t)}{dt} + \cos t\frac{dt}{dt})dt = \int_0^{2\pi} (-t\sin t - \sin t\cos t + \cos t)dt$$

$$= [t\cos t]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \cos t dt - \int_0^{2\pi} \sin t\cos t dt + \int_0^{2\pi} \cos t dt = 2\pi - [\frac{1}{2}\sin^2 t]_0^{2\pi} = 2\pi$$

On peut aussi retrouver ce résultat, en remarquant que la forme différentielle γ est exacte, en effet $\omega = df$ où $f(x, y, z) = xz - \frac{y^2}{2}$ par suite le théorème précédent nous donne:

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma df = f(\gamma(2\pi)) - f(\gamma(0)) = f(1, 0, 2\pi) - f(1, 0, 0) = 2\pi.$$

7.2.13 Exercice Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer l'intégrale curviligne de la forme différentielle $\omega(x,\ y) = -ydx + xdy$ le long de $\gamma(t) = (t,\ t^n),\ 0 \le t \le 1$.

Le théorème suivant est une généralisation du théorème fondamental du calcul intégral

7.2.14 THÉORÈME (LE THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'INTÉGRALE CURVILIGNE)
L'intégrale curviligne d'une forme différentielle exacte (ou totale) $\omega = df$ ne dépend que des extrémités $\gamma(a) = (x(a), y(a), z(a))$ et $\gamma(b) = (x(b), y(b), z(b))$ de la courbe γ, on a :

$$\boxed{\int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))}$$

En particulier, si γ est une courbe fermée (c-à-d $\gamma(a) = \gamma(b)$) alors, $\boxed{\oint_\gamma df = 0}$.

Démonstration: Par le théorème de dérivation des fonctions composées on a:

$$\int_\gamma df = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t),z(t))x'(t)dt + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t),z(t))y'(t)dt + \frac{\partial f}{\partial z}(x(t),y(t),z(t))z'(t)dt$$

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t),z(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t),z(t))y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z}(x(t),y(t),z(t))z'(t) \right) dt$$

$$= \int_a^b \frac{df(\gamma(t))}{dt}\, dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$ ∎

7.2.1 Circulation (ou travail) d'un champ de vecteurs

Soit $\gamma : I = [a,\ b] \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée de classe C^1, et soit $V : \gamma([a,\ b]) \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs continu. D'un point de vue physique, on se représente $\gamma(t)$ comme étant la position d'une particule à l'instant t, qui se déplace sous l'influence du champ de forces $\overrightarrow{V}$ (ainsi $\overrightarrow{V}(\gamma(t))$ est la force agissant sur la particule à l'instant t). L'intégrale curviligne du champ de vecteurs le long de la courbe γ, notée $\int_\gamma V$, est par définition le travail effectué par ce champ de forces pour déplacer la particule le long de la courbe de $\gamma(a)$ à $\gamma(b)$. Mathématiquement, cela se traduit de la manière suivante

7.2.16 DÉFINITION

Soient $\overrightarrow{V} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et $\gamma : [a,\ b] \to D \subset \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée.

On appelle **circulation (ou travail)** de $\overrightarrow{V}$ le long de γ l'intégrale curviligne

$$\boxed{\int_\gamma \overrightarrow{V} := \int_a^b \overrightarrow{V}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt}$$

où $\overrightarrow{V}(\gamma(t))$ indique que le champ $\overrightarrow{V}$ est évalué sur les points de la courbe et $\cdot$ désigne le produit scalaire entre vecteurs.

• Si γ est une courbe fermée, la circulation de $\overrightarrow{V}$ le long de γ s'écrit aussi

$$\oint_\gamma \overrightarrow{V}.$$

7.2.17 REMARQUE (IMPORTANTE)

Soit $\overrightarrow{V} = P\overrightarrow{i} + Q\overrightarrow{j} + R\overrightarrow{k}$ un champ de vecteurs et $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ la forme différentielle associée alors la circulation (ou travail) de $\overrightarrow{V}$ le long de toute courbe γ est égal à l'intégrale curviligne de ω le long de γ

$$\boxed{\int_\gamma \overrightarrow{V} = \int_\gamma \omega}$$

Les propriétés suivantes du travail d'un champ de vecteurs sont des traductions de celles de l'intégrale curviligne.

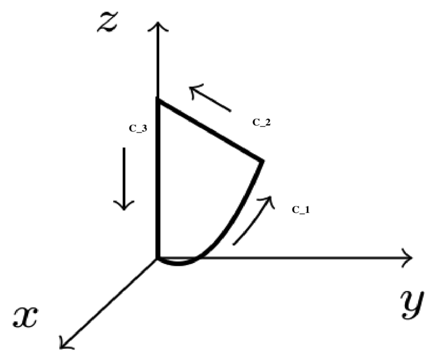
7.2.18 PROPOSITION (PROPRIÉTÉS)
Les principales propriétés sont:

1) $\int_{-\gamma} \overrightarrow{V} = -\int_{\gamma} \overrightarrow{V}$.

2) $\int_{\gamma} (a\overrightarrow{V}_1 + b\overrightarrow{V}_2) = a\int_{\gamma} \overrightarrow{V}_1 + b\int_{\gamma} \overrightarrow{V}_2$.

3) $\int_{\gamma_1+\gamma_2} \overrightarrow{V} = \int_{\gamma_1} \overrightarrow{V} + \int_{\gamma_2} \overrightarrow{V}$.

7.2.19 EXEMPLE. Calcul de la circulation du champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(x, y, z) = z\,\overrightarrow{i} - y\,\overrightarrow{j} + x\,\overrightarrow{k}$ le long de la courbe fermée $C^+ = C_1^+ \cup C_2^+ \cup C_3^+$



• La circulation du champ $\overrightarrow{V}(x, y, z) = z\,\overrightarrow{i} - y\,\overrightarrow{j} + x\,\overrightarrow{k}$ le long de la parabole C_1^+ : $\gamma_1(t) = (t, t, t^2)$ $t \in [0, 1]$
est :

$$\int_{C_1^+} \overrightarrow{V} \cdot d\gamma = \int_0^1 (t^2, -t, t) \cdot (1, 1, 2t)\, dt = \int_0^1 t^2 - t + 2t^2\, dt = \int_0^1 3t^2 - t\, dt = [t^3 - \frac{t^2}{2}]_0^1 = \frac{1}{2}$$

• La circulation de $\overrightarrow{V}(x, y, z) = z\,\overrightarrow{i} - y\,\overrightarrow{j} + x\,\overrightarrow{k}$ le long du segment C_2^+ : $\gamma_2(t) = (1-t, 1-t, 1)$ $t \in [0, 1]$ est :

$$\int_{C_2^+} \overrightarrow{V} = \int_0^1 (1, t-1, 1-t) \cdot (-1, -1, 0)\, dt = \int_0^1 -1 - (t-1)\, dt = \int_0^1 -t\, dt = [-\frac{t^2}{2}]_0^1 = -\frac{1}{2}.$$

• Enfin, la circulation de $\overrightarrow{V}(x, y, z) = z\,\overrightarrow{i} - y\,\overrightarrow{j} + x\,\overrightarrow{k}$ le long du segment C_3^+ : $\gamma_3(t) = (0, 0, 1-t)$ $t \in [0, 1]$ est :

$$\int_{C_3^+} \overrightarrow{V} = \int_0^1 (1-t, 0, 0) \cdot (0, 0, -1)\, dt = \int_0^1 0\, dt = 0$$

• En conclusion, la circulation de $\overrightarrow{V}$ le long de la courbe fermée $C^+ = C_1^+ \cup C_2^+ \cup C_3^+$ vaut:

$$\int_{C^+} \overrightarrow{V} = \int_{C_1^+} \overrightarrow{V} + \int_{C_2^+} \overrightarrow{V} + \int_{C_3^+} \overrightarrow{V} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 0 = 0.$$

7.2.20 Exercice Montrer que la circulation du champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(x,\ y) = (x^2y,\ y^3)$ le long du segment I d'origine $(0,0)$ et d'extrémité $(1,1)$ est égale à $\frac{1}{2}$.

7.2.2 Circulation (ou travail) d'un champ de gradient

7.2.21 DÉFINITION
Un champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ *est un* champ de gradient (ou dérive d'un potentiel) *s'il existe* f de classe C^2 *de* D *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *telle que* $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f$.

7.2.22 EXEMPLE. 1) $\overrightarrow{V}(x,\ y) = (y,\ x)$ est un champ de gradient sur $D = \mathbb{R}^2$, on peut prendre $f(x,y) = xy$ 2) $\overrightarrow{V}(x,y,z) = (y+z+\dfrac{1}{x}, x+z+\dfrac{1}{y}, x+y+\dfrac{1}{z})$ est un champ de gradient sur $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}$. En effet, $\overrightarrow{V}(x,y,z)$ est le gradient de la fonction $f(x,y,z) = xy + yz + zx + \ln(x) + \ln(y) + \ln(z)$ (à vérifier)

3) $\overrightarrow{V}(x,y,z) = (x,x,x)$ *n'est pas un champ de gradient. En effet,* $\overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{V}) = (0,1,1) \neq \overrightarrow{0}$.

7.2.23 Exercice Montrer que le champ de vecteurs

$$\overrightarrow{V}(x,y,z) = (ax+by+cz)\,\overrightarrow{i} + (dx+ey+fz)\,\overrightarrow{j} + (gx+hy+iz)\,\overrightarrow{k}$$

est irrotationnel sur $\mathbb{R}^3$ si et seulement si la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ est symétrique..

Montrer que dans ce cas $\overrightarrow{V}$ est un champ de gradient.

Dans le cadre des champs de vecteurs, le théorème suivant est une traduction du théorème fondamental de l'intégrale curviligne

7.2.24 THÉORÈME (LE THÉORÈME FONDAMENTAL DES CHAMPS DE GRADIENTS)
Soit $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f$ *un champ de gradient de domaine* D*, alors*

• *La circulation de* $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$ *le long d'une courbe* γ contenue dans D *joignant deux points* A *et* B *ne dépend pas de la courbe mais seulement des valeurs de* f aux points A et B (on dit qu'un champ de gradient est conservatif). On a

$$\int_\gamma \overrightarrow{\text{grad}}\, f = f(B) - f(A)\,.$$

• En particulier, la circulation de $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f$ *le long d'une courbe fermée* C *est nulle*

$$\oint_\gamma \overrightarrow{\text{grad}}\, f = 0.$$