6.0.31 EXEMPLE (CALCUL D'INTÉGRALE EN UTILISANT LES SYMÉTRIES). .
Soit à calculer $I = \iiint_{B_R} (ax+by+cz)^2 dxdydz$ où B_R est la boule de centre $O = (0,0,0)$ et de rayon R.

On a $(ax+by+cz)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + 2(abxy + acxz + bcyz)$, d'autre part en raison des symétries du domaine B_R on aura:

$$\iiint_{B_R} xydxdydz = \iiint_{B_R} yzdxdydz = \iiint_{B_R} zxdxdydz = 0,$$

et

$$\iiint_{B_R} x^2dxdydz = \iiint_{B_R} y^2dxdydz = \iiint_{B_R} z^2dxdydz.$$

Alors,

$$I = (a^2+b^2+c^2) \iiint_{B_R} z^2dxdydz.$$

On utilise les coordonnées sphériques

$$x = r\cos\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\cos\varphi,\ z = r\sin\varphi.$$

le domaine B_R est transformé en $B'_R = [0,R] \times [-\pi,\ \pi] \times [-\pi/2,\ \pi/2]$, et $z^2 = r^2\sin^2\varphi$. La formule de changement de variables nous donne:

$$\iiint_{B_R} z^2dxdydz = \iiint_{B'_R} (r^2\sin^2\varphi)\, r^2\cos\varphi drd\theta d\varphi = \iiint_{B'_R} r^4\sin^2\varphi\ \cos\varphi dr\theta d\varphi.$$

Comme les variables sont séparables, on a

$$\iiint_{B_R} z^2dxdydz = (\int_0^R r^4 d\,r)\,(\int_{-\pi}^{\pi} d\theta)\,(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi\sin^2\varphi d\varphi) = \frac{2R^5\pi}{5}\left[\frac{\sin^3\varphi}{3}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{4R^5\pi}{15},$$

d'où

$$I = (a^2+b^2+c^2)\frac{4\pi R^5}{15}.$$

6.0.3 Applications: Masse, centre de gravité et moment d'inertie

Il existe un grand nombre d'applications de l'intégrale multiple. Il suffit de penser aux notions d'espérance et de variance en probabilités ou encore des équations intégrales. Beaucoup de ces applications seront discutées dans d'autres cours. Ici nous n'énumérerons que quelques-unes, surtout reliées à la physique. Plusieurs quantités physiques peuvent être exprimées comme des intégrales multiples. De tels expressions sont fondées sur la définition de l'intégrale comme la limite d'une somme.

On a vu par exemple que si D est un domaine régulier de l'espace, alors$\text{Volume}(D) = \iiint_D dxdydz$.

Plus généralement, si D a une densité de masse (ou de charge) $\rho = dq/dvol$, alors la **masse (ou charge) totale** *de D est donnée par l'intégrale*

$$M(D) = \iiint_D \rho(x,y,z)dxdydz$$

Une autre notion fondamentale en mécanique du solide est celle de **centre de gravité** *G (ou centre d'inertie) d'un domaine D.*

• *Si $D \subset \mathbb{R}^3$, on a $G = (x_G, y_G, z_G)$ où*

$$x_G = \frac{1}{M(D)} \int\int\int_D x\rho(x,y,z)dxdydz, \quad y_G = \frac{1}{M(D)} \int\int\int_D y\rho(x,y,z)dxdydz$$

$$z_G = \frac{1}{M(D)} \int\int\int_D z\rho(x,\ y,\ z)dxdydz$$

• *Si la densité ρ est constante, on dit que D est* **homogène**, *et les expressions se simplifient. On obtient alors*

$$x_G = \frac{1}{\text{Volume}(D)} \iiint_D xdxdydz$$

$$y_G = \frac{1}{\text{Volume}(D)} \iiint_D ydxdydz$$

$$z_G = \frac{1}{\text{Volume}(D)} \iiint_D zdxdydz\ .$$

6.0.32 REMARQUE

Le centre de gravité G a des propriétés physiques très importantes. Une d'entre elles est utile pour avoir l'intuition de sa position: le domaine D reste à l'équilibre s'il est posé sur son centre de gravité. A noter que G n'est pas toujours situé dans D, par exemple si D est un pneu.

Pour revenir aux notions mathématiques que nous avons abordées ici, le centre de gravité se comporte très bien par découpage des domaines. Le centre de gravité du tout est alors le barycentre des centres de gravités des morceaux. On a plus précisément : Si le domaine D se découpe en la réunion de domaines $D_1, D_2, \cdots D_n$, alors

$$M(D)x_G = M(D_1)x_{G_1} + M(D_2)x_{G_2} + \cdots + M(D_n)x_{G_n}$$

et des expressions similaires pour y_G et z_G. C'est une conséquence immédiate du découpage de l'intégrale

$$M(D)x_G = \iint_D x\rho(x,\ y)dxdy = \sum_{i=1}^{n} \iint_{D_i} x\rho(x,\ y)dxdy = \sum_{i=1}^{n} M(D_i)x_{G_i}.$$

On peut ainsi déterminer le centre de gravité de domaines constitués de figures géométriques simples, en tout cas en principe pour l'instant, car il nous faut d'abord avoir des outils de calculs d'intégrales multiples efficaces sur ces figures.

6.0.33 REMARQUE

Notez enfin la similitude des formules valables pour un système fini de masses. En effet, la formule s'écrit aussi

$$x_G = \frac{1}{M(D)} \sum_{i=1}^{n} x_{G_i} M(D_i)\ ,$$

et la formule n'est que la *version continue* de cette expression, où l'on aurait découpé D en une infinité de morceaux infinitésimaux D_i de masse $dm_i \simeq \rho dxdy$, tout à fait dans l'esprit de découpage et d'échantillonage des sommes de Riemann qui nous on permis d'introduire la notion d'intégrale multiple.

6.0.34 EXEMPLE. On cherche à déterminer le centre de gravité du demi-cylindre homogène $\Omega = \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 \leq R^2,\ z \in [0,\ H],\ y \geq 0\}$.

Dans, ce cas, Il est naturel de travailler en coordonnées cylindriques et d'écrire le demi-cylindre comme

$$\tilde{\Omega} = \{(\ r,\ \theta,\ z) |\ r \in [0,\ R],\ \theta \in [0,\ \pi],\ z \in [0,\ H]\}.$$

Le calcul de la masse totale donne

$$M = \iiint_\Omega dxdydz\ = \iiint_{\tilde{\Omega}} rdrd\theta dz = \int_0^R\ rdr \int_0^\pi d\theta \int_0^H dz\ = \frac{\pi R^2 H}{2}.$$

- Le centre de gravité G a pour coordonnées cartésiennes

$$x_G = \frac{1}{M} \iiint_\Omega xdxdydz = \frac{1}{M} \int_0^R\ r^2 dr \int_0^\pi \cos\theta d\theta \int_0^H dz = 0$$

(on aurait pu déduire ce résultat de la symétrie du domaine par rapport au plan $y0z$)

$$y_G = \frac{1}{M}\iiint_\Omega y dxdydz = \frac{1}{M}\int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^H dz = \frac{2}{\pi R^2 H}\frac{R^3}{3}2H = \frac{4R}{3\pi}$$

$$z_G = \frac{1}{M}\iiint z dxdydz = \frac{1}{M}\int_0^R r dr \int_0^\pi d\theta \int_0^H z dz = \frac{2}{\pi R^2 H}\frac{R^2}{2}\pi\frac{H^2}{2} = \frac{H}{2}$$

Ainsi $G = (0, \frac{4R}{3\pi}, \frac{H}{2})$.

Moment d'inertie

Il est aussi possible dans la situation précédente de décrire le moment d'inertie par rapport à un axe . En physique, le moment d'inertie d'un système de n particules par rapport à un axe de rotation est défini par l'équation

$$m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots + m_n r_n^2$$

dans laquelle m_i est la masse et r_i est la distance à l'axe donné de la i-ième particule.

6.0.35 DÉFINITION
Soit $\rho : \Omega \to [0, +\infty[$ la *densité volumique* d'un matériau Ω. Soit Δ une droite. On note par $r(x,\ y,\ z)$ la distance du point $(x,\ y,\ z)$ à la droite Δ. On appelle **Moment d'inertie** de Ω par rapport à la droite Δ le nombre réel

$$\iiint_\Omega (r(x,\ y,\ z))^2 \rho(x,\ y,\ z) dxdydz.$$

6.0.36 REMARQUE
1) Si $(x_\Delta, y_\Delta, z_\Delta)$ est la projection orthogonale de $(x,\ y,\ z)$ sur la droite Δ alors le moment d'inertie $I_\Delta(D)$ de Ω par rapport à la droite Δ est égal à

$$I_\Delta(D) = \iiint_\Omega ((x - x_\Delta)^2 + (y - y_\Delta)^2 + (z - z_\Delta)^2)\rho(x,y,z) dxdydz.$$

6.0.37 EXEMPLE. Soit à calculer le moment d'inertie du cylindre homogène $\Omega = \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 \leq R^2,\ z \in [0,\ H]\}$ par rapport à son axe de révolution, qui n'est autre que l'axe $0z$.

Soit μ la densité volumique de Ω et $r(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2}$ la distance d'un point (x,y,z) à l'axe Oz.

Comme dans l'exemple précédent, on va travailler en coordonnées cylindriques et d'écrire le cylindre comme

$$\tilde{\Omega} = \{(r,\, \theta,\, z) |\, r \in [0,\, R],\, \theta \in [-\pi,\, \pi],\, z \in [0,\, H]\} = [0,\, R] \times [-\pi,\, \pi] \times [0,\, H].$$

Le moment d'inertie de Ω par rapport à l'axe $0z$ est égal à

$$I_{Oz}(D) = \mu \iiint_{\Omega} (r(x,y,z))^2 dxdydz = \mu \iiint_{\Omega} (x^2+y^2) dxdydz = \mu \iiint_{\tilde{\Omega}} r^3 drd\theta dz$$

$$= \mu \int_0^R r^3 dr \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^H dz = \mu \frac{\pi R^4 H}{2}.$$

Part III

Intégrale curviligne et intégrale de surface

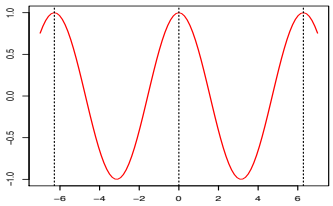
Chapter 7

Intégrale curviligne

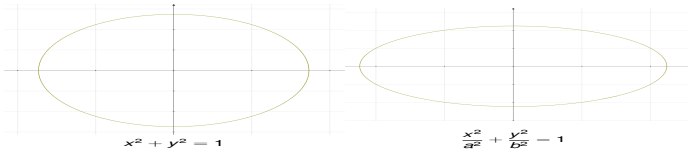
7.1 Courbes paramétrées

Il existe plusieurs façons mathématiques de décrire formellement la notion de courbe. En voilà trois:

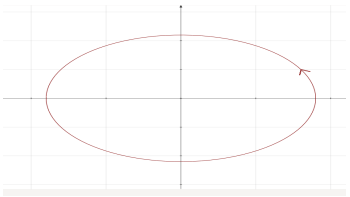
• *au moyen des graphes de fonctions d'une variable*



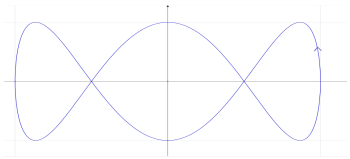
• *au moyen d'équations implicites: on parle alors de courbes définies implicitement*



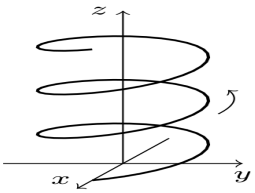
• *au moyen d'un paramètre, le temps t: on parle alors de courbes paramétrées*



$x(t) = a\cos t, y(t) = b\sin t$



$x(t) = \cos t, y(t) = \sin 3t$



$$x(t) = \cos t, y(t) = \sin t,\ z(t) = t$$

Dans ce chapitre, on donne la préférence aux courbes paramétrées (elles s'expriment facilement en toute dimension).

7.1.1 Définition

Une **courbe paramétrée** est une fonction vectorielle (de classe C^1)

$$\begin{array}{rcl} \gamma : [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ t & \longmapsto & (x_1(t), x_2(t), \dots x_n(t)) \end{array}$$

Le **support** de la courbe paramétrée est le lieu des points

$$C = \{\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots x_n(t)) |\ t \in [a,b]\},$$

• Une courbe paramétrée est naturellement **orientée** par le sens croissant du paramètre t. On note dans ce cas le support par C^+ et on dit qu'il est orienté dans le sens direct (ou positif).
• Le support de γ **parcouru dans le sens inverse** (ou négatif) est noté $-\gamma$ (son support est noté C^- ou $-C$) il est par exemple paramétré par
$\tilde{\gamma} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(a+b-t)$.
• On dit que la courbe γ est **fermée** lorsque son origine coïncide avec son extrémité si $I = [a,\ b]$ et $\gamma(a) = \gamma(b)$.
• On dit que la courbe γ est **simple** lorsque $I = [a,\ b]$, $t, t' \in]a,b[$,

$$t \neq t' \implies \gamma(t) \neq \gamma(t').$$

• On appelle **vecteur vitesse** la dérivée première de γ:

$$\gamma'(t) = \frac{d\gamma(t)}{dt} = (x_1'(t), x_2'(t), \dots x_n'(t))$$

7.1.2 Définition

Une courbe paramétrée $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est dite **régulière** si pour tout $t \in I$,

$$\|\gamma'(t)\| \neq 0$$

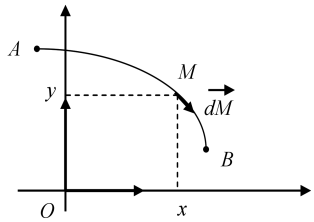
autrement dit, si son vecteur vitesse ne s'annule jamais. La droite passant par $\gamma(t)$ et de vecteur directeur $\gamma'(t)$ est appelée la **droite tangente** en t à γ.

Longueur de courbe paramétrée

Soit un arc de courbe AB, paramétré par

$$\begin{array}{rcl} \gamma : [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ t & \longmapsto & (x_1(t), x_2(t), \dots x_n(t)) \end{array}.$$

On considère un point M *qui se déplace le long de la courbe de A à B, par déplacements infinitésimaux $\overrightarrow{dM}$.*



Chacun de ces déplacements a une longueur égale à $\|\overrightarrow{dM}\|$, et la longueur totale L de l'arc $\widehat{AB}$ est la somme de ces longueurs infinitésimales. Donc

$$\mathrm{L} = \int_A^B \|\overrightarrow{dM}\|$$

Si on travaille en coordonnées cartésiennes, on a

$$\overrightarrow{dM} = \overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{dx_2} + \cdots + \overrightarrow{x_n}.$$

Il en résulte immédiatement que,

$$L_A^B = \int_A^B \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2}.$$

On a $A = \gamma(a)$ et $B = \gamma(b)$, comme $dx_i = x_i'(t)dt$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ alors

$$L_A^B = \int_A^B \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2} = \int_a^b \sqrt{(x_1')(t)^2 + (x_2'(t))^2 + \cdots + (x_n'(t))^2}\, dt.$$

Ainsi **la longueur de la courbe γ entre A et B** *est donnée par la formule*

$$\boxed{L_A^B(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{(x_1'(t))^2 + (x_2'(t))^2 + \cdots + (x_n'(t))^2}\, dt}$$

7.1.3 EXEMPLE. Soit $\gamma(t) = (t, t, t)$ avec $t \in [0,\ 1]$.
Puisque $\gamma(t) = (t,\ t,\ t)$, on a $\gamma'(t) = (1, 1, 1)$ d'où

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3} \neq 0.$$

Ainsi γ est régulière.

7.1.4 EXEMPLE. Soit $\gamma(t) = (3\cos t, 0, 2\sin t)$ avec $t \in [0, 2\pi]$. On a $x(t)/3 = \cos t$, $y(t) = 0$ et $z(t)/2 = \sin t$, ainsi le support de la courbe est l'ellipse contenue dans le plan $\{y = 0\}$,

$$\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$$

Puisque $\gamma(t) = (3\cos t,\ 0, 2\sin t)$, on a

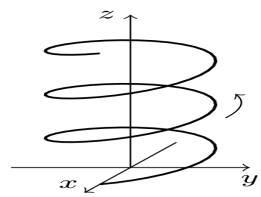
$$\gamma'(t) = (-3\sin t,\ 0, 2\cos t)$$

d'où

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{9\sin^2 t + 4\cos^2 t} \neq 0$$

Ainsi γ est régulière.

7.1.5 EXEMPLE. Soit $\gamma(t) = (\cos t, \sin t,\ t)$ avec $t \in [0,\ 6\pi]$.
On a $x^2(t) + y^2(t) = 1$, le support de la courbe est contenue dans un cylindre de base un cercle unité. La hauteur $z(t)$ est le paramètre angulaire.



Le support de la courbe est donc une hélice.
Puisque $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, on aura $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$ par suite

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

ainsi la courbe γ est régulière.

• La longueur de γ entre 0 et 2π vaut

$$L_0^{2\pi}(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = 2\sqrt{2}\pi$$

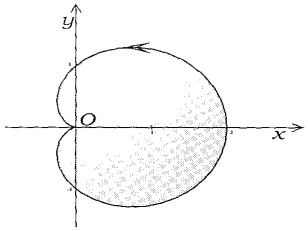
7.1.6 REMARQUE (LONGUEUR DE COURBE PARAMÉTRÉE EN COORDONNÉES POLAIRES)
Soit γ une courbe définie en coordonnées polaires par: $\rho = \rho(\theta)$ avec $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$. On a $\gamma(\theta) = (x(\theta), y(\theta)) = (\rho(\theta)\cos(\theta), \rho(\theta)\sin(\theta))$ en dérivant on obtient $\gamma'(\theta) = (\rho'(\theta)\cos(\theta) - \rho(\theta)\sin(\theta), \rho'(\theta)\sin(\theta) + \rho(\theta)\cos(\theta))$, par suite

$$\begin{aligned}\|\gamma'(t)\|^2 = x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2 &= (\rho'(\theta)\cos(\theta) - \rho(\theta)\sin(\theta))^2 + (\rho'(\theta)\sin(\theta) + \rho(\theta)\cos(\theta))^2 \\ &= \rho'(\theta)^2 + \rho(\theta)^2.\end{aligned}$$

D'où la longueur de la courbe:

$$\boxed{L_{\theta_1}^{\theta_2}(\gamma) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho'(\theta)^2 + \rho(\theta)^2} d\theta}$$

7.1.7 Exercice Soit à calculer la longueur de la cardioïde γ d'équation en coordonnées polaires $\rho(\theta) = 1 + \cos(\theta)$ avec $\theta \in [-\pi, \pi]$.



On a $L_{-\pi}^{\pi}(\gamma) = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{(-\sin(\theta))^2 + (1+\cos(\theta))^2} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2 + 2\cos(\theta)} d\theta = \sqrt{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1+\cos(\theta)} d\theta = \sqrt{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2\cos^2(\frac{\theta}{2})} d\theta$

$$= 2\int_{-\pi}^{\pi} |\cos(\frac{\theta}{2})| d\theta = 2\left[2\sin(\frac{\theta}{2})\right]_{-\pi}^{\pi} = 8.$$