6.0.2 Changement de variables dans une intégrale triple

Terminologie: Un changement de variables entre deux domaines (réguliers) bornés Ω et Ω' de $\mathbb{R}^3$ est un un difféomorphisme de classe C^1

$$\begin{array}{rccl} h: & \Omega' & \longrightarrow & \Omega \\ & (u,v,w) & \mapsto & (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \end{array}$$

c-à-d que l'application h est une bijection de classe C^1 dont l'inverse h^{-1} est aussi de classe C^1.

6.0.13 DÉFINITION
La *matrice jacobienne* d'une application de classe $\mathcal{C}^1$:

$$h:\ (u,\ v,\ w) \mapsto (x(u,\ v,\ w),\ y(u,\ v,\ w),\ z(u,\ v,\ w))$$

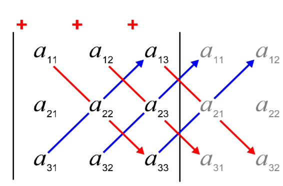
en un point $(u,\ v,\ w)$ est la matrice 3×3:

$$Jac_h(u,\ v,\ w) := \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} (u,\ v,\ w)$$

Le *déterminant jacobien* de h est la fonction de $(u,\ v,\ w)$:

$$\det Jac_h(u,\ v,\ w) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} (u,\ v,\ w)$$

6.0.14 REMARQUE
Pour une matrice carrée d'ordre 3, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ le déterminant est
$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}$.
On peut retrouver ce résultat par la règle de Sarrus: pour chacune des six diagonales (voir figure) on associé une quantité qui est le produit de ses termes; le déterminant de la matrice est alors égal à la somme des quantités des diagonales rouges moins la



somme des quantités diagonales bleues.
Par exemple, $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = (45 + 84 + 96) - (105 + 48 + 72) = 225 - 225 = 0.$

6.0.15 THÉORÈME (THÉORÈME DE CHANGEMENT DE VARIABLES)
Soient Ω' et Ω deux domaines bornés de $\mathbb{R}^3$ et $h(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$ un difféomorphisme de classe C^1 entre Ω' et Ω.

Alors pour toute fonction continue $f : \Omega \to \mathbb{R}$ on a

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{\Omega'} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left|\det Jac_h(u,v,w)\right| dudvdw.$$

Remarque importante: *Comme pour les intégrales doubles, cette formule est aussi valable sous des conditions moins fortes. Introduisons à cet effet la notion suivante: une partie C de $\mathbb{R}^3$ est dite négligeable si son volume est nul.*
(par exemple un point, une droite, une sphère, plus généralement une réunion finie (même dénombrable) d'images d'applications de classe C^1, de rectangle fermé de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.)

Voici la condition moins fortes sous lequelles la formule de changement de variables est encore valable:

$$\begin{cases} \textit{il existe deux parties négligeables } C \subset \Omega \textit{ et } C' \subset \Omega' \textit{ telle que } h \textit{ est une bijection de } \Omega' - C' \textit{ sur } \Omega - C \\ h \textit{ est de classe } C^1 \textit{ en tous les points de } \Omega' \\ \det Jac_h(u,\ v) \neq 0, \textit{ en tout point } (u,v,w) \textit{ de } \Omega' - C'. \end{cases}$$

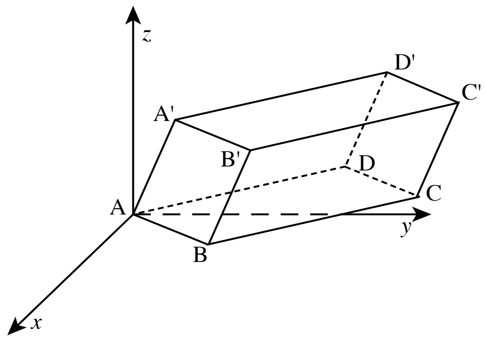
Alors pour toute fonction f continue sur Ω, on a encore la formule de changement de variables:

$$\boxed{\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{\Omega'} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left|\det Jac_h(u,v,w)\right| dudvdw.}$$

6.0.16 THÉORÈME
Sous les hypothèses précédentes:

$$\text{volume}(\Omega) = \iiint_{\Omega} dxdydz = \iiint_{\Omega'} |\det Jac_h(u,\ v,\ w)| dudvdw.$$

6.0.17 EXEMPLE. On va calculer l'intégrale triple $\iiint_P xdxdydz$ où P est le parallélépipède ayant pour sommets les points suivants: $A = (0,0,0), B = (1,2,1), C = (2,3,2), D = (1,1,1), A' = (1,1,2), B' = (2,3,3), C' = (3,4,4)$ et $D' = (2,2,3)$.



6.0.18 REMARQUE (EQUATION D'UN PLAN PASSANT PAR TROIS POINTS NON ALIGNÉS)
L'équation d'un plan dans $\mathbb{R}^3$ est de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. (cette équation n'est pas unique, elle l'est à une multiplication par un scalaire: par exemple pour $k \neq 0$, les équations $ax + by + cz + d = 0$ et $kax + kby + kcz + kd = 0$ définissent le même plan.

Soient $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ et $C(x_3, y_3, z_3)$ trois points non alignés, alors une équation du plan passant par ces trois points est donnée par:

$$\det \begin{pmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{pmatrix} = 0.$$

En utilisant la formule précédente, on va déterminer les équations des plans engendrés par les faces du parallélépipède.

i) Le plan contenant les points A, B, C, D a pour équation $0 = \det \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = x - z$, donc $-x + z = 0$.

De même on trouve:

ii) l'équation du plan contenant les points A′, B′, C′, D′ est $-x + z = 1$.

iii) Le plan contenant les points A, B, A′, B′ a pour équation $3x - y - z = 0$,

iv) enfin, celle du plan contenant C, D, C′, D′ est $3x - y - z = 1$.

v) Le plan contenant les points A, D, A′, D′ a pour équation $-x + y = 0$,

vi) celle du plan contenant B, C, B′, C′ est $-x + y = 1$.

Nous pouvons considérer les nouvelles coordonnées:

$$\begin{cases} u = -x + z, \\ v = 3x - y - z, \\ w = -x + y \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que ceci est un changement de variables:

$$\begin{cases} x &= u+v+w \\ y &= u+v+2w \\ z &= 2u+v+w \end{cases} \Rightarrow h(u,v,w) = (u+v+w, u+v+2w, 2u+v+w)$$

et $\det Jac_h(u,v,w) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1.$

Dans ces nouvelles coordonnées, P correspond au cube

$$P' = \{(u,\ v,\ w) \mid 0 \le u \le 1, 0 \le v \le 1, 0 \le w \le 1\} = [0,1]^3.$$

Nous avons donc, par la formule de changement de variables:

$$\iiint_P x\, dxdydz = \iiint_{P'} (u+v+w)|1|\, dudvdw = \int_0^1 (\int_0^1 (\int_0^1 (u+v+w)dw)dv)du$$

$$= \int_0^1 (\int_0^1 (u+v+\frac{1}{2})dv)du = \int_0^1 (u+1)du = \left[\frac{u^2}{2}+u\right]_0^1 = \frac{3}{2}.\square$$

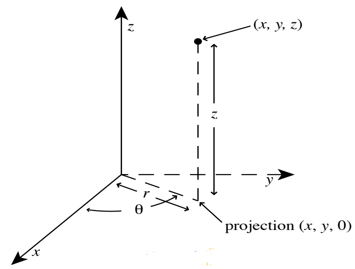
Coordonnées cylindriques et sphériques

Il y a plusieurs façon de représenter les points de l'espace, parmi tous ces systèmes de coordonnées, deux apparaissent souvent; il s'agit des coordonnées cylindriques et des coordonées sphériques. Nous allons maintenant considérer ces systèmes de coordonnées, ainsi que le changement de coordonnées pour les intégrales triples des coordonnées cartésiennes à ces coordonnées.

Coordonnées cylindriques

Dans $\mathbb{R}^3$, les coordonnées cylindriques sont utiles lorsque le problème étudié présente une symétrie autour d'un axe. Un point $M = (x,\ y,\ z)$ de $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire sous la forme $M = (r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ z)$ avec $r \ge 0$ et $\theta \in]-\pi,\pi]$. Le triplet $(r,\ \theta,\ z)$ s'appelle les coordonnées cylindriques de M. On note

$$\begin{cases} h:\ [0,+\infty[\times]-\pi,\ \pi]\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ \qquad (r,\ \theta,\ z) & \mapsto & (x,\ y,\ z) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ z) \end{cases}$$



6.0.19 THÉORÈME (PASSAGE EN COORDONNÉES CYLINDRIQUES)
Soient $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* $\Omega = h(\Omega')$ (domaines réguliers). On a alors
$$\iiint_\Omega f(x,\, y,\, z)dxdydz = \iiint_{\Omega'} f(r\cos\theta,\, r\sin\theta,\, z)r\, dr\, d\theta\, dz.$$

Démonstration. On applique Fubini en tranches z =constante
$$\iint_\Omega f(x,\, y,\, z)dxdydz = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} (\iint_{D_z} f(x,\, y,\, z)dxdy)dz$$
et on passe en polaires sur chaque D_z
$$= \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} (\iint_{D_z'} f(r\cos\theta,\, r\sin\theta,\, z)rdrd\theta)dz = \iiint_{\Omega'} f(r\cos\theta,\, r\sin\theta,\, z)rdrd\theta dz$$
par Fubini.□

6.0.20 REMARQUE
Cet énoncé est très utile pour intégrer des fonctions sur des solides de révolution : c'est-à-dire des solides invariants par rotation autour de l'axe des z. Les équations de ces domaines sont des fonctions de $r = \sqrt{x^2+y^2}$ et de z.

6.0.21 EXEMPLE. Calculer $I = \iint_\Omega (x^2+y^2)dxdydz$ où $\Omega = \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \le z \le 1,\ x^2+y^2 \le z^2\}$. Pour $y = 0$, on a $x^2 \le z^2$ et $0 \le z \le 1$ qui est un triangle. Par conséquent Ω est le cône plein de sommet l'origine et de base le disque $D_1 = \{(x,\, y,\, 1),\ x^2+y^2 \le 1\}$.
La tranche D_z de Ω est le disque de rayon z, centré en $(0,0,z)$.
On obtient par passage en coordonnées cylindriques
$$\Omega = \{(r\cos\theta,\, r\sin\theta,\, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le \theta \le 2\pi,\, 0 \le z \le 1, 0 \le r \le z\}.$$
Ainsi,
$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \left(\int_0^z r^3 dr\right) dz = 2\pi \int_0^1 \frac{z^4}{4} dz = 2\pi \left[\frac{z^5}{20}\right]_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{10}}.$$

6.0.22 PROPOSITION
Soit V un domain régulier de $\mathbb{R}^3$ tel qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et une fonction $\varphi : \mathbb{R} \times [a,\, b] \to \mathbb{R}_+^*$ continue, 2π périodique par rapport à la première variable, et vérifiant

$$V = \{(r\cos\theta,\, r\sin(\theta),\, z),\, \theta \in \mathbb{R},\, z \in [a,\, b],\, 0 \leq r \leq \varphi(\theta,\, z)\}$$

Alors pour toute fonction f continue sur V on a

$$\iiint_V f(x,\, y,\, z)dxdydz = \int_a^b \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\varphi(\theta,z)} f(r\cos(\theta),\, r\sin(\theta),\, z) r dr d\theta dz.$$

Démonstration: Pour $z \in [a,\, b]$ on note $T_z = V \cap (\mathbb{R}^2 \times \{z\})$. Alors on a

$$T_z = \{(r\cos(\theta),\, r\sin(\theta),\, z) \mid \theta \in \mathbb{R},\, 0 \leq r \leq \varphi(\theta,\, z)\}.$$

Puisque

$$\iint_V f(x,\, y,\, z)dxdydz = \int_a^b \left(\iint_{T_z} f(x,\, y,\, z)dxdy\right) dz,$$

il suffit de passer en coordonnées polaires sur chaque tranche T_z. $\square$ ∎

Le passage en coordonnées cylindriques transforme l'élément de volume $dxdydz$ en $rdrd\theta dz$.

6.0.24 EXEMPLE. Considérons à nouveau $\iiint_V (1-2yz)dxdydz$ où V est le cylindre de hauteur 3 et de base le disque unité D. En coordonnées cylindriques, on a

$$V = \{(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z) |\, r \in]0,1],\, \theta \in [0, 2\pi[,\, z \in [0,3]\}$$

ainsi

$$\iiint_V (1-2yz)dxdydz = \int_0^3 \left(\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (1-2rz\sin\theta)\, d\theta\right) rdr\right) dz$$

$$= \int_0^3 \left(\int_0^1 \left([\theta + 2rz\cos\theta]_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\right) rdr\right) dz = \int_0^3 \left(\int_0^1 (2\pi + 2rz - 2rz)\, rdr\right) dz$$

$$= \int_0^3 \left(\int_0^1 2\pi r dr\right) dz = 3\pi[r^2]_0^1 \; = 3\pi$$

6.0.25 REMARQUE
La fonction $(x, y, z) \mapsto 2yz$ est impaire par rapport à y et le domaine V est symétrique par rapport au plan xoz, alors $\iiint_V 2yzdxdydz = 0$. Alors, le calcul de $\iiint_V (1-2yz)dxdydz$ est réduit à celui de $\iiint_V dxdydz =$ Volume du cylindre V $= hauteur \times Aire(D) = 3\pi$.

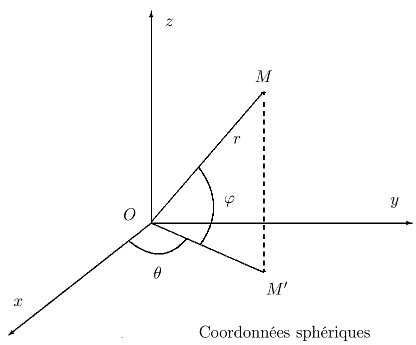
Coordonnées sphériques

Une définition: *un point $M = (x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3$ est caractérisé par*

sa distance à l'origine $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$,

sa longitude $\theta \in]-\pi, \pi]$,

sa latitude $\varphi \in [-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}[$ ($\varphi = \frac{\pi}{2}$ vers le pôle nord, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ vers le pôle sud).



Coordonnées sphériques

On a $z^2 + (x^2+y^2) = r^2$, d'où $z = r\sin\varphi$ et $\sqrt{x^2+y^2} = r\cos\varphi$ et finalement

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi. \end{cases}$$

6.0.26 REMARQUE

Les coordonnées sphériques sont adaptées aux problèmes qui présentent une symétrie autour du centre du repère.

6.0.27 PROPOSITION

L'application $h : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\ \pi[\times]-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}[& \longrightarrow \mathbb{R}^3 \backslash (\mathbb{R}_- \times \{0\} \times \mathbb{R}) \\ (r,\ \theta,\ \varphi) & \longmapsto (x,y,z) = (r\cos(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \end{cases}$

est un difféomorphisme de classe C^1 (un changement de variables).

En outre pour tout $(r,\ \theta,\ \varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[\times]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$ on a $\det Jac_h(r,\ \theta) = r^2\cos(\varphi)$.

Démonstration: Pour $(r,\ \theta,\ \varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[\times]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$ on a

$$\begin{pmatrix} x(r,\theta,\varphi) \\ y(r,\theta,\varphi) \\ z(r,\theta,\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\theta)\cos(\varphi) \\ r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

On commence par noter que les dérivées partielles

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos(\theta)\cos(\varphi)\ ,\ \frac{\partial x}{\partial \theta} = -\ r\sin(\theta)\cos(\varphi)\ ,\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\ r\cos(\theta)\sin(\varphi)\ ,$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin(\theta)\cos(\varphi)\ ,\ \frac{\partial y}{\partial \theta} = \ r\cos(\theta)\cos(\varphi)\ ,\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\ r\sin(\theta)\sin(\varphi)\ ,$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \sin(\varphi),\ \frac{\partial z}{\partial \theta} = 0,\ \text{et}\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} = r\cos(\varphi)$$

existent et sont continues, d'où h est de classe C^1.

Si $r\cos(\varphi)\cos(\theta) = r'\cos(\varphi')\cos(\theta')$, $r\cos(\varphi)\sin(\theta) = r'\cos(\varphi')\sin(\theta')$ et $r\sin(\varphi) = r'\sin(\varphi')$ alors

$$r = \sqrt{(\ r\cos(\varphi)\cos(\theta))^2 + (\ r\cos(\varphi)\sin(\theta))^2 + (\ r\sin(\varphi))^2}$$

$$= \sqrt{(\ r'\cos(\varphi')\cos(\theta'))^2 + (\ r'\cos(\varphi')\sin(\theta'))^2 + (\ r'\sin(\varphi'))^2} = \ r'$$

car $r,\ r' > 0$. De ceci, nous obtenons $\cos(\varphi)\cos(\theta) = \cos(\varphi')\cos(\theta'), \cos(\varphi)\sin(\theta) = \cos(\varphi')\sin(\theta')$ et $\sin(\varphi) = \sin(\varphi')$ après simplification par r. La dernière équation nous permet d'affirmer que $\varphi = \varphi'$ car $-\frac{\pi}{2} < \varphi, \varphi' < \frac{\pi}{2}$. De $\cos(\varphi)\cos(\theta) = \cos(\varphi)\cos(\theta'), \cos(\varphi)\sin(\theta) = \cos(\varphi)\sin(\theta')$, nous obtenons que $\cos(\theta) = \cos(\theta'), \sin(\theta) = \sin(\theta')$ après simplification par $\cos(\varphi) > 0$ car $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$. De cette dernière observation, nous obtenons que $\theta = \theta'$ car $-\pi \leq \theta, \theta' < \pi$. Ainsi h est une fonction injective.

Finalement, le jacobien est

$$\det Jac_h(r,\ \theta, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\cos(\varphi) & -r\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\theta)\cos(\varphi) & r\cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & 0 & r\cos(\varphi) \end{vmatrix}$$

$$= (r^2\cos^2(\theta)\cos^3(\varphi) + r^2\sin^2(\theta)\sin^2(\varphi)\sin(\varphi) + 0)$$

$$-(-r^2\cos^2(\theta)\sin^2(\varphi)\cos(\varphi) + 0 - r^2\sin^2(\theta)\cos^3(\varphi))$$

$$= r^2\cos^3(\varphi) + r^2\sin^2(\varphi)\cos(\varphi) = r^2\cos(\varphi)(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) = r^2\cos(\varphi).\ \square$$

■

Le passage en coordonnées sphériques donne $\boxed{dxdydz = r^2\cos\varphi\ drd\theta d\varphi.}$

6.0.29 Théorème (Passage en coordonnées sphériques)

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *une fonction continues sur* $\Omega = h(\Omega')$ domaines réguliers de $\mathbb{R}^3$. Alors on a

$$\boxed{\iiint_{\Omega} f(x,\ y,\ z)\ dxdydz = \iiint_{\Omega'} f(r\cos\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\ r^2\cos\varphi drd\theta d\varphi.}$$

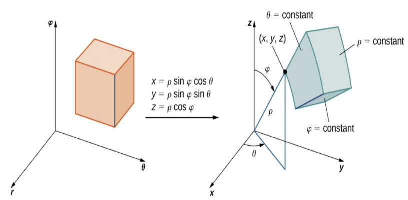
Cette formule est très utile pour intégrer des fonctions sur des secteurs angulaires de boules.

Attention:

Il existe plusieurs conventions pour les coordonnées sphériques (celles des mathématiciens, des physiciens, des astronomes, des géographes$\cdots$). On a suivi dans ce cours la convention "rayon-longitude-latitude". Il y a d'autres conventions, par exemple "rayon-longitude-colatitude" : pour ce choix, φ est la colatitude, elle varie entre 0 et π. On aura dans ce cas, les coordonnées sphériques (r, θ, φ) et les coordonnées du point

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\varphi. \end{cases}$$

où la longitude $\theta \in [0,\ 2\pi]$ et la colatitude $\varphi \in [0, \pi]$. ($\varphi = 0$ vers le pôle nord, $\varphi = \pi$ vers le pôle sud). Ces coordonnées sphériques donne (pour élément de volume) $dxdydz = r^2\sin\varphi\, drd\theta d\varphi$.



Pour s'adapter au contexte, il vaut mieux se rappeler de la méthode plutôt que d'apprendre les formules par coeur.

La formule de changement de variables devient dans ce cas :

6.0.30 Théorème (Passage en coordonnées sphériques ("rayon-longitude-colatitude"))
Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *une fonction continues sur* $\Omega = h(\Omega')$ domaines réguliers de $\mathbb{R}^3$. Alors on a

$$\boxed{\iiint_\Omega f(x,\ y,\ z)\ dxdydz = \iiint_{\Omega'} f(r\cos\theta\sin\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\varphi)\ r^2\sin\varphi drd\theta d\varphi.}$$

6.0.31 Exemple (Volume d'une la boule de rayon R en coordonnées sphériques).
Quitte à faire une translation, on peut supposer que la boule B_R de rayon R est centrée à l'origine. Elle est représentée, en coordonnées sphériques, par

$$B'_R = \left\{(r, \theta, \varphi,)|\ r \in [0,\ R],\ \ \theta \in [-\pi,\ \pi],\ \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\right\}.$$

Puisque $dxdydz = r^2\cos(\varphi)drd\theta d\varphi$ on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(B_R) &= \iiint_{B_R} dxdydz = \iiint_{B'_R} r^2\cos\varphi drd\theta d\varphi = \int_0^R r^2dr\int_{-\pi}^{\pi}d\theta\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(\varphi)d\varphi \\ &= [\frac{r^3}{3}]_0^R \times [\theta]_{-\pi}^{\pi} \times [\sin(\varphi)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{R^3}{3}\times 2\pi\times 2 = \frac{4\pi R^3}{3}.\end{aligned}$$

6.0.32 EXEMPLE (CALCUL D'INTÉGRALE EN UTILISANT LES SYMÉTRIES). .
Soit à calculer $I = \iiint_{B_R} (ax+by+cz)^2 dxdydz$ où B_R est la boule de centre $O = (0,0,0)$ et de rayon R.

On a $(ax+by+cz)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + 2(abxy + acxz + bcyz)$, d'autre part en raison des symétries du domaine B_R on aura:

$$\iiint_{B_R} xydxdydz = \iiint_{B_R} yzdxdydz = \iiint_{B_R} zxdxdydz = 0,$$

et

$$\iiint_{B_R} x^2dxdydz = \iiint_{B_R} y^2dxdydz = \iiint_{B_R} z^2dxdydz.$$

Alors,

$$I = (a^2+b^2+c^2)\iiint_{B_R} z^2dxdydz.$$

On utilise les coordonnées sphériques

$$x = r\cos\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\cos\varphi,\ z = r\sin\varphi.$$

le domaine B_R est transformé en $B'_R = [0,R]\times[-\pi,\ \pi]\times[-\pi/2,\ \pi/2]$, et $z^2 = r^2\sin^2\varphi$. La formule de changement de variables nous donne:

$$\iiint_{B_R} z^2dxdydz = \iiint_{B'_R} (r^2\sin^2\varphi)\, r^2\cos\varphi drd\theta d\varphi = \iiint_{B'_R} r^4\sin^2\varphi\ \cos\varphi dr\theta d\varphi.$$

Comme les variables sont séparables, on a

$$\iiint_{B_R} z^2dxdydz = (\int_0^R r^4 d\,r)\,(\int_{-\pi}^{\pi} d\theta)\,(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\varphi\sin^2\varphi d\varphi) = \frac{2R^5\pi}{5}\left[\frac{\sin^3\varphi}{3}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{4R^5\pi}{15},$$

d'où

$$I = (a^2+b^2+c^2)\frac{4\pi R^5}{15}.$$

6.0.3 Applications: Masse, centre de gravité et moment d'inertie

Il existe un grand nombre d'applications de l'intégrale multiple. Il suffit de penser aux notions d'espérance et de variance en probabilités ou encore des équations intégrales. Beaucoup de ces applications seront discutées dans d'autres cours. Ici nous n'énumérerons que quelques-unes, surtout reliées à la physique. Plusieurs quantités physiques peuvent être exprimées comme des intégrales multiples. De tels expressions sont fondées sur la définition de l'intégrale comme la limite d'une somme.
On a vu par exemple que si D est un domaine régulier de l'espace, alorsVolume $(D) = \iiint_D dxdydz$.

Plus généralement, si D a une densité de masse (ou de charge) $\rho = dq/dvol$, alors la **masse (ou charge) totale** *de D est donnée par l'intégrale*

$$M(D) = \iiint_D \rho(x,y,z)dxdydz$$

Une autre notion fondamentale en mécanique du solide est celle de **centre de gravité** G *(ou centre d'inertie) d'un domaine* D.

• *Si* $D \subset \mathbb{R}^3$, *on a* $G = (x_G, y_G, z_G)$ *où*

$$x_G = \frac{1}{M(D)} \int\int\int_D x\rho(x,y,z)dxdydz, \quad y_G = \frac{1}{M(D)} \int\int\int_D y\rho(x,y,z)dxdydz$$

$$z_G = \frac{1}{M(D)} \int\int\int_D z\rho(x,\ y,\ z)dxdydz$$

• *Si la densité* ρ *est constante, on dit que* D *est* **homogène**, *et les expressions se simplifient. On obtient alors*

$x_G \dfrac{1}{\text{Volume}(D)} \displaystyle\iint_D xdxdydz$ *dans* $\mathbb{R}^3$

$y_G =$

$displaystyle \frac{1}{\text{Volume}(D)} \iint_D ydxdydz$ *dans* $\mathbb{R}^3$

$z_G = \dfrac{1}{\text{Volume}(D)} \displaystyle\iint_D zdxdydz$ *dans* $\mathbb{R}^3$.

6.0.33 REMARQUE

Le centre de gravité G a des propriétés physiques très importantes. Une d'entre elles est utile pour avoir l'intuition de sa position: le domaine D reste à l'équilibre s'il est posé sur son centre de gravité. A noter que G n'est pas toujours situé dans D, par exemple si D est un pneu.

Pour revenir aux notions mathématiques que nous avons abordées ici, le centre de gravité se comporte très bien par découpage des domaines. Le centre de gravité du tout est alors le barycentre des centres de gravités des morceaux. On a plus précisément : Si le domaine D *se découpe en la réunion de domaines* $D_1, D_2, \cdots D_n$, *alors*

$$M(D)x_G = M(D_1)x_{G_1} + M(D_2)x_{G_2} + \cdots + M(D_n)x_{G_n}$$

et des expressions similaires pour y_G *et* z_G. *C'est une conséquence immédiate du découpage de l'intégrale*

$$M(D)x_G = \iint_D x\rho(x,\ y)dxdy = \sum_{i=1}^{n} \iint_{D_i} x\rho(x,\ y)dxdy = \sum_{i=1}^{n} M(D_i)x_{G_i}.$$

On peut ainsi déterminer le centre de gravité de domaines constitués de figures géométriques simples, en tout cas en principe pour l'instant, car il nous faut d'abord avoir des outils de calculs d'intégrales multiples efficaces sur ces figures.

6.0.34 REMARQUE

Notez enfin la similitude des formules valable pour un système fini de masses. En effet, la formule s'écrit aussi

$$x_G = \frac{1}{M(D)} \sum_{i=1}^{n} x_{G_i} M(D_i)\ ,$$

et la formule n'est que la *version continue* de cette expression, où l'on aurait découpé D en une infinité de morceaux infinitésimaux D_i de masse $dm_i \simeq \rho dxdy$, tout à fait dans l'esprit de découpage et d'échantillonage des sommes de Riemann qui nous on permis d'introduire la notion d'intégrale multiple.

6.0.35 EXEMPLE. On cherche à déterminer le centre de gravité du demi-cylindre homogène $\Omega = \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 \leq R^2,\, z \in [0,\, H],\, y \geq 0\}$.

Dans, ce cas, Il est naturel de travailler en coordonnées cylindriques et d'écrire le demi-cylindre comme

$$\tilde{\Omega} = \{(\, r,\, \theta,\, z) |\, r \in [0,\, R],\, \theta \in [0,\, \pi],\, z \in [0,\, H]\}.$$

Le calcul de la masse totale donne

$$M = \iiint_{\Omega} dxdydz \;= \iiint_{\tilde{\Omega}} rdrd\theta dz = \int_0^R rdr \int_0^{\pi} d\theta \int_0^H dz \;= \frac{\pi R^2 H}{2}.$$

• Le centre de gravité G a pour coordonnées cartésiennes

$$x_G = \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} xdxdydz = \frac{1}{M} \int_0^R r^2 dr \int_0^{\pi} \cos\theta d\theta \int_0^H dz = 0$$

(on aurait pu déduire ce résultat de la symétrie du domaine par rapport au plan $y0z$)

$$y_G = \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} ydxdydz = \frac{1}{M} \int_0^R r^2 dr \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^H dz = \frac{2}{\pi R^2 H} \frac{R^3}{3} 2H = \frac{4R}{3\pi}$$

$$z_G = \frac{1}{M} \iiint zdxdydz = \frac{1}{M} \int_0^R rdr \int_0^{\pi} d\theta \int_0^H zdz = \frac{2}{\pi R^2 H} \frac{R^2}{2} \pi \frac{H^2}{2} = \frac{H}{2}$$

Ainsi $G = (0,\, \frac{4R}{3\pi},\, \frac{H}{2})$.

Moment d'inertie

Il est aussi possible dans la situation précédente de décrire le moment d'inertie par rapport à un axe ou un point. En physique, le moment d'inertie d'un système de n particules par rapport à un axe de rotation est défini par l'équation

$$m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots + m_n r_n^2$$

dans laquelle m_i est la masse et r_i est la distance à l'axe donné de la i-ième particule.

6.0.36 DÉFINITION
Soit $\mu : \Omega \to [0, +\infty[$ la *densité volumique* d'un matériau Ω. Soit Δ une droite. On note par $r(x,\ y,\ z)$ la distance du point $(x,\ y,\ z)$ à la une droite Δ. On appelle **Moment d'inertie** de Ω par rapport à la droite Δ le nombre réel

$$\iiint_\Omega (r(x,\ y,\ z))^2 \mu(x,\ y,\ z)dxdydz.$$

6.0.37 REMARQUE
1) Si $(x_\Delta, y_\Delta, z_\Delta)$ est la projection orthogonale de $(x,\ y,\ z)$ sur la droite Δ alors le moment d'inertie de Ω par rapport à la droite Δ est égal à

$$\iiint_\Omega ((x - x_\Delta)^2 + (y - y_\Delta)^2 + (z - z_\Delta)^2)\mu(x,y,z)dxdydz.$$

6.0.38 EXEMPLE. Soit à calculer le moment d'inertie du cylindre homogène $\Omega = \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 \leq R^2,\ z \in [0,\ H]\}$ par rapport à son axe de révolution, qui n'est autre que l'axe $0z$.

Soit μ la densité volumique de Ω et $r(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2}$ la distance d'un point (x,y,z) à l'axe $0z$.

Comme dans l'exemple précédent, on va travailler en coordonnées cylindriques et d'écrire le cylindre comme

$$\tilde{\Omega} = \{(\ r,\ \theta,\ z)|\ r \in [0,\ R],\ \theta \in [-\pi,\ \pi],\ z \in [0,\ H]\}.$$

Le moment d'inertie de Ω par rapport à l'axe $0z$ est égal à

$$\mu \iiint_\Omega (r(x,y,z))^2 dxdydz = \mu \iiint_\Omega (x^2 + y^2)dxdydz = \mu \iiint_{\tilde{\Omega}} r^3 drd\theta dz$$

$$= \mu \int_0^R r^3 dr \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^H dz = \mu \frac{\pi R^4 H}{2}.$$