6.0.2 Changement de variables dans une intégrale triple

Terminologie: Un changement de variables entre deux domaines (réguliers) bornés Ω et Ω' de $\mathbb{R}^3$ est un un difféomorphisme de classe C^1

$$\begin{array}{rccc} h: & \Omega' & \longrightarrow & \Omega \\ & (u,v,w) & \mapsto & (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \end{array}$$

c-à-d que l'application h est une bijection de classe C^1 dont l'inverse h^{-1} est aussi de classe C^1.

6.0.12 Définition

La *matrice jacobienne* d'une application de classe $\mathcal{C}^1$:

$$h: \ (u,\ v,\ w) \mapsto (x(u,\ v,\ w),\ y(u,\ v,\ w),\ z(u,\ v,\ w))$$

en un point $(u,\ v,\ w)$ est la matrice 3×3:

$$Jac_h(u,\ v,\ w) := \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} (u,\ v,\ w)$$

Le *déterminant jacobien* de h est la fonction de $(u,\ v,\ w)$:

$$\det Jac_h(u,\ v,\ w) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} (u,\ v,\ w)$$

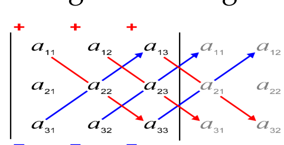
qu'on notera par $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$.

6.0.13 Remarque

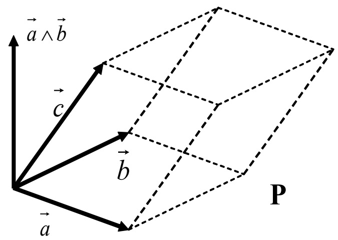
Pour une matrice carrée d'ordre 3, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ le déterminant est

$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}$.

On peut retrouver ce résultat par la règle de Sarrus: pour chacune des six diagonales (voir figure) on associé une quantité qui est le produit de ses termes; le déterminant de la matrice est alors égal à la somme des quantités des diagonales rouges moins la somme des quantités diagonales bleues.



Déterminant et volume



Soit **P** le parallélépipède engendré par les vecteurs
$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$.

Alors le volume de **P** est égal à la valeur absolue au produit mixte de ces trois vecteurs, est aussi donné par le déterminant de la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$: en effet

$$\text{le volume } \mathbf{P} = \left|(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c}\right| = \left| \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} \\ -\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \left| x_3 \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} - y_3 \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} + z_3 \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \right|.$$

6.0.14 Théorème (Théorème de changement de variables)
Soient Ω' et Ω deux domaines bornés de $\mathbb{R}^3$ et $h(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$ un difféomorphisme de classe C^1 entre Ω' et Ω.

Alors pour toute fonction continue $f : \Omega \to \mathbb{R}$ on a

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{\Omega'} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| dudvdw.$$

Remarque importante: *Comme pour les intégrales doubles, cette formule est aussi valable sous des conditions moins fortes. Introduisons à cet effet la notion*

suivante: une partie C de $\mathbb{R}^3$ est dite négligeable si son volume est nul.
(par exemple un point, une droite, une sphère, plus généralement une réunion finie (même dénombrable) d'images d'applications de classe C^1, de rectangle fermé de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.)

Voici la condition moins fortes sous lequelles la formule de changement de variables est encore valable:

$$\begin{cases} \text{il existe deux parties négligeables } C \subset \Omega \text{ et } C' \subset \Omega' \text{ telle que } h \text{ est une bijection de } \Omega' - C' \text{ sur } \Omega - C \\ h \text{ est de classe } C^1 \text{ en tous les points de } \Omega' \\ \det Jac_h(u,\ v) \neq 0, \text{ en tout point } (u,v,w) \text{ de } \Omega' - C'. \end{cases}$$

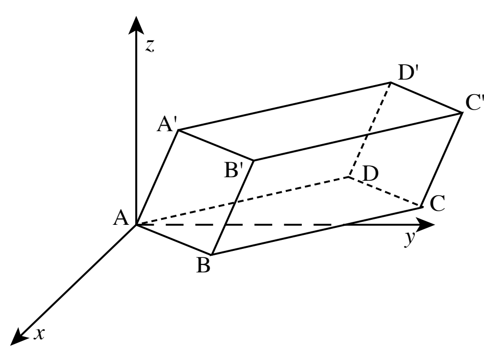
Alors pour toute fonction f continue sur Ω, on a encore la formule de changement de variables:

$$\boxed{\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{\Omega'} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)) \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw.}$$

6.0.15 THÉORÈME
Sous les hypothèses précédentes:

$$\text{volume}(\Omega) = \iiint_\Omega dxdydz = \iiint_{\Omega'} \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw.$$

6.0.16 EXEMPLE. On va calculer l'intégrale triple $\iiint_P xdxdydz$ où P est le parallélépipède ayant pour sommets les points suivants: $A = (0,0,0), B = (1,2,1), C = (2,3,2), D = (1,1,1), A' = (1,1,2), B' = (2,3,3), C' = (3,4,4)$ et $D' = (2,2,3)$.



6.0.17 REMARQUE (EQUATION D'UN PLAN PASSANT PAR TROIS POINTS NON ALIGNÉS) L'équation d'un plan dans $\mathbb{R}^3$ est de la forme $ax+by+cz+d = 0$ où $(a,b,c) \neq (0,0,0)$. (cette équation n'est pas unique, elle l'est à une multiplication par un scalaire: par exemple pour $k \neq 0$, les équations $ax+by+cz+d = 0$ et $kax+kby+kcz+kd = 0$ définissent le même plan.

Soient $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$ et $C(x_3,y_3,z_3)$ trois points non alignés, alors une équation du plan passant par ces trois points est donnée par:

$$\det\begin{pmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{pmatrix} = 0.$$

En utilisant la formule précédente, on va déterminer les équations des plans engendrés par les faces du parallélépipède.

i) Le plan contenant les points A, B, C, D a pour équation $0 = \det\begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = x-z$, donc $-x+z = 0$.

De même on trouve:

ii) l'équation du plan contenant les points A′, B′, C′, D′ est $-x+z = 1$.

iii) Le plan contenant les points A, B, A′, B′ a pour équation $3x-y-z = 0$,

iv) enfin, celle du plan contenant C, D, C′, D′ est $3x-y-z = 1$.

v) Le plan contenant les points A, D, A′, D′ a pour équation $-x+y = 0$,

vi) celle du plan contenant B, C, B′, C′ est $-x+y = 1$.

Nous pouvons considérer les nouvelles coordonnées:

$$\begin{cases} u = -x+z, \\ v = 3x-y-z, \\ w = -x+y \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que ceci est un changement de variables:

$$\begin{cases} x &= u+v+w \\ y &= u+v+2w \\ z &= 2u+v+w \end{cases} \Rightarrow \ h(u,v,w) = (u+v+w, u+v+2w, 2u+v+w)$$

et $\det Jac_h(u,v,w) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1.$

Dans ces nouvelles coordonnées, P correspond au cube

$$P' = \{(u,\ v,\ w) \mid 0 \le u \le 1, 0 \le v \le 1, 0 \le w \le 1\} = [0,1]^3.$$

Nous avons donc, par la formule de changement de variables:

$$\iiint_P x\,dxdydz = \iiint_{P'} (u+v+w)|1|\,dudvdw = \int_0^1 (\int_0^1 (\int_0^1 (u+v+w)dw)dv)du$$

$$= \int_0^1 (\int_0^1 (u+v+\frac{1}{2})dv)du = \int_0^1 (u+1)du = \left[\frac{u^2}{2}+u\right]_0^1 = \frac{3}{2}.\square$$

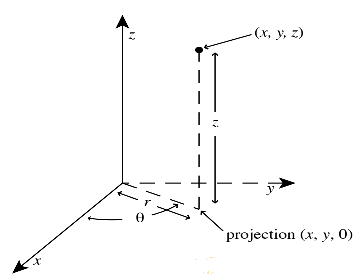
Les coordonnées cylindriques et sphériques

Il y a plusieurs façon de représenter les points de l'espace, parmi tous ces systèmes de coordonnées, deux apparaissent souvent; il s'agit des coordonnées cylindriques et des coordonées sphériques. Nous allons maintenant considérer ces systèmes de coordonnées, ainsi que le changement de coordonnées pour les intégrales triples des coordonnées cartésiennes à ces coordonnées.

Coordonnées cylindriques

Dans $\mathbb{R}^3$, les coordonnées cylindriques sont utiles lorsque le problème étudié présente une symétrie autour d'un axe. Un point $M = (x,\ y,\ z)$ de $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire sous la forme $M = (r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ z)$ avec $r \ge 0$ et $\theta \in [-\pi, \pi]$. Le triplet $(r,\ \theta,\ z)$ s'appelle les coordonnées cylindriques de M. On note

$$\begin{cases} h: & [0,+\infty[\times[-\pi,\ \pi]\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (r,\ \theta,\ z) & \mapsto & (x,\ y,\ z) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ z) \end{cases}$$



6.0.18 Théorème (Passage en coordonnées cylindriques)
Soient $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* $\Omega = h(\Omega')$ (domaines réguliers). On a alors

$$\iiint_\Omega f(x,\, y,\, z) dxdydz = \iiint_{\Omega'} f(r\cos\theta,\, r\sin\theta,\, z) r\, dr\, d\theta\, dz.$$

Démonstration. On applique Fubini en tranches z =constante

$$\iint_\Omega f(x,\, y,\, z) dxdydz = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} (\iint_{D_z} f(x,\, y,\, z) dxdy) dz$$

et on passe en polaires sur chaque D_z

$$= \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} (\iint_{D'_z} f(r\cos\theta,\, r\sin\theta,\, z) rdrd\theta) dz = \iiint_{\Omega'} f(r\cos\theta,\, r\sin\theta,\, z) rdrd\theta dz$$

par Fubini.□

6.0.19 Remarque
Cet énoncé est très utile pour intégrer des fonctions sur des solides de révolution : c'est-à-dire des solides invariants par rotation autour de l'axe des z. Les équations de ces domaines sont des fonctions de $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et de z.

6.0.20 Exemple. Calculer $I = \iint_\Omega (x^2 + y^2) dxdydz$ où $\Omega = \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \leq z \leq 1,\ x^2 + y^2 \leq z^2\}$. Pour $y = 0$, on a $x^2 \leq z^2$ et $0 \leq z \leq 1$ qui est un triangle. Par conséquent Ω est le cône plein de sommet l'origine et de base le disque $D_1 = \{(x,\, y,\, 1),\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.
La tranche D_z de Ω est le disque de rayon z, centré en $(0, 0, z)$.
On obtient par passage en coordonnées cylindriques

$$\Omega = \{(r\cos\theta,\, r\sin\theta,\, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \leq \theta \leq 2\pi,\, 0 \leq z \leq 1, 0 \leq r \leq z\}.$$

Ainsi,

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \left(\int_0^z r^3 dr\right) dz = 2\pi \int_0^1 \frac{z^4}{4} dz = 2\pi \left[\frac{z^5}{20}\right]_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{10}}.$$

6.0.21 Proposition
Soit V un domain régulier de $\mathbb{R}^3$ tel qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et une fonction $\varphi : \mathbb{R} \times [a,\, b] \to \mathbb{R}_+^*$ continue, 2π périodique par rapport à la première variable, et vérifiant

$$V = \{(r\cos\theta,\, r\sin(\theta),\, z),\ \theta \in \mathbb{R},\ z \in [a,\, b],\ 0 \leq r \leq \varphi(\theta,\, z)\}$$

Alors pour toute fonction f continue sur V on a

$$\iiint_V f(x,\, y,\, z)dxdydz = \int_a^b \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\varphi(\theta,z)} f(r\cos(\theta),\, r\sin(\theta),\, z) r dr d\theta dz.$$

Démonstration: Pour $z \in [a,\, b]$ on note $T_z = V \cap (\mathbb{R}^2 \times \{z\})$. Alors on a

$$T_z = \{(r\cos(\theta),\, r\sin(\theta),\, z) \mid \theta \in \mathbb{R},\, 0 \leq r \leq \varphi(\theta,\, z)\}.$$

Puisque

$$\iint_V f(x,\, y,\, z)dxdydz = \int_a^b \left(\iint_{T_z} f(x,\, y,\, z)dxdy \right) dz,$$

il suffit de passer en coordonnées polaires sur chaque tranche T_z. ■

Le passage en coordonnées cylindriques transforme l'élément de volume $dxdydz$ en $rdrd\theta dz$.

6.0.23 EXEMPLE. Considérons à nouveau $\iiint_V (1-2yz)dxdydz$ où V est le cylindre de hauteur 3 et de base le disque unité D. En coordonnées cylindriques, on a

$$V = \{(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z) |\ r \in]0,1],\ \theta \in [0, 2\pi[,\ z \in [0,3]\}$$

ainsi

$$\iiint_V (1-2yz)dxdydz = \int_0^3 \left(\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (1 - 2rz\sin\theta)\, d\theta \right) rdr \right) dz$$

$$= \int_0^3 \left(\int_0^1 \left([\theta + 2rz\cos\theta]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \right) rdr \right) dz = \int_0^3 \left(\int_0^1 (2\pi + 2rz - 2rz)\, rdr \right) dz$$

$$= \int_0^3 \left(\int_0^1 2\pi r dr \right) dz = 3\pi [r^2]_0^1 \ = 3\pi$$

6.0.24 REMARQUE

La fonction $(x, y, z) \mapsto 2yz$ est impaire par rapport à y et le domaine V est symétrique par rapport au plan xoz, alors $\iiint_V 2yzdxdydz = 0$. Alors, le calcul de $\iiint_V (1-2yz)dxdydz$ est réduit à celui de $\iiint_V dxdydz =$ Volume du cylindre V $=$ *hauteur* $\times$ *Aire*$(D) = 3\pi$.

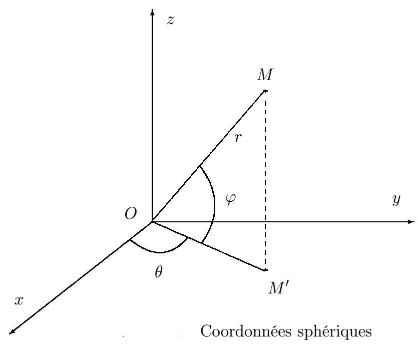
Coordonnées sphériques

Une définition: *un point* $M = (x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3$ *est caractérisé par*

sa distance à l'origine $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,

sa longitude $\theta \in]-\pi, \pi]$,

sa latitude $\varphi \in [-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}[$ ($\varphi = \frac{\pi}{2}$ *vers le pôle nord,* $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ *vers le pôle sud).*



Coordonnées sphériques

On a $z^2 + (x^2 + y^2) = r^2$, *d'où* $z = r \sin \varphi$ *et* $\sqrt{x^2 + y^2} = r \cos \varphi$ *et*

finalement $\begin{cases} x = r \cos \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \cos \varphi \\ z = r \sin \varphi. \end{cases}$

6.0.25 REMARQUE

Les coordonnées sphériques sont adaptées aux problèmes qui présentent une symétrie autour du centre du repère.

6.0.26 PROPOSITION

L'application $h : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\ \pi[\times]-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}[& \longrightarrow \mathbb{R}^3 \backslash (\mathbb{R}_- \times \{0\} \times \mathbb{R}) \\ (r,\ \theta,\ \varphi) & \longmapsto (x, y, z) = (r \cos(\theta) \cos(\varphi), r \sin(\theta) \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \end{cases}$

est un difféomorphisme de classe C^1 (un changement de variables).

En outre pour tout $(r,\ \theta,\ \varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[\times]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$ on a

$$\det Jac_h(r,\ \theta) = r^2 \cos(\varphi).$$

Démonstration: Pour $(r,\ \theta,\ \varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[\times]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$ on a

$$\begin{pmatrix} x(r, \theta, \varphi) \\ y(r, \theta, \varphi) \\ z(r, \theta, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\theta) \cos(\varphi) \\ r \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

On commence par noter que les dérivées partielles

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos(\theta)\cos(\varphi)\ ,\ \frac{\partial x}{\partial \theta} = -\, r\sin(\theta)\cos(\varphi)\ ,\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\, r\cos(\theta)\sin(\varphi)\ ,$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin(\theta)\cos(\varphi)\ ,\ \frac{\partial y}{\partial \theta} = \ r\cos(\theta)\cos(\varphi)\ ,\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\, r\sin(\theta)\sin(\varphi)\ ,$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \sin(\varphi),\ \frac{\partial z}{\partial \theta} = 0,\text{ et } \frac{\partial z}{\partial \varphi} = r\cos(\varphi)$$

existent et sont continues, d'où h est de classe C^1.

Si $r\cos(\varphi)\cos(\theta) = r'\cos(\varphi')\cos(\theta')$, $r\cos(\varphi)\sin(\theta) = r'\cos(\varphi')\sin(\theta')$ et $r\sin(\varphi) = r'\sin(\varphi')$ alors

$$r = \sqrt{(\ r\cos(\varphi)\cos(\theta))^2 + (\ r\cos(\varphi)\sin(\theta))^2 + (\ r\sin(\varphi))^2}$$

$$= \sqrt{(\ r'\cos(\varphi')\cos(\theta'))^2 + (\ r'\cos(\varphi')\sin(\theta'))^2 + (\ r'\sin(\varphi'))^2} = \ r'$$

car $r,\ r' > 0$. De ceci, nous obtenons $\cos(\varphi)\cos(\theta) = \cos(\varphi')\cos(\theta'), \cos(\varphi)\sin(\theta) = \cos(\varphi')\sin(\theta')$ et $\sin(\varphi) = \sin(\varphi')$ après simplification par r. La dernière équation nous permet d'affirmer que $\varphi = \varphi'$ car $-\frac{\pi}{2} < \varphi, \varphi' < \frac{\pi}{2}$. De $\cos(\varphi)\cos(\theta) = \cos(\varphi)\cos(\theta'), \cos(\varphi)\sin(\theta) = \cos(\varphi)\sin(\theta')$, nous obtenons que $\cos(\theta) = \cos(\theta'), \sin(\theta) = \sin(\theta')$ après simplification par $\cos(\varphi) > 0$ car $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$. De cette dernière observation, nous obtenons que $\theta = \theta'$ car $-\pi \leq \theta, \theta' < \pi$. Ainsi h est une fonction injective.

Finalement, le jacobien est

$$\tfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \det Jac_h(r,\ \theta, \varphi) = \det \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\cos(\varphi) & -r\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\theta)\cos(\varphi) & r\cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & 0 & r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$= (r^2\cos^2(\theta)\cos^3(\varphi) + r^2\sin^2(\theta)\sin^2(\varphi)\sin(\varphi) + 0)$$

$$-(-r^2\cos^2(\theta)\sin^2(\varphi)\cos(\varphi) + 0 - r^2\sin^2(\theta)\cos^3(\varphi))$$

$$= r^2\cos^3(\varphi) + r^2\sin^2(\varphi)\cos(\varphi) = r^2\cos(\varphi)(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) = r^2\cos(\varphi).$$

■

Le passage en coordonnées sphériques donne $\boxed{dxdydz = r^2\cos(\varphi)\ drd\theta d\varphi.}$

6.0.28 THÉORÈME (PASSAGE EN COORDONNÉES SPHÉRIQUES)
Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *une fonction continues sur* $\Omega = h(\Omega')$ domaines réguliers de $\mathbb{R}^3$. Alors on a

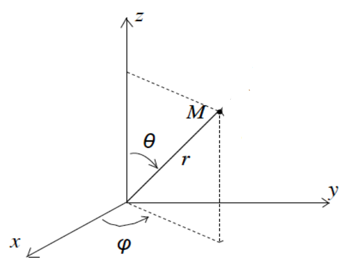
$$\boxed{\iiint_{\Omega} f(x,\ y,\ z)\ dxdydz = \iiint_{\Omega'} f(r\cos\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\ r^2\cos\varphi drd\theta d\varphi.}$$

Cette formule est très utile pour intégrer des fonctions sur des secteurs angulaires de boules.

Attention:

Il existe plusieurs conventions pour les coordonnées sphériques (celles des mathématiciens, des physiciens, des astronomes, des géographes$\cdots$). On a suivi dans ce cours la convention "rayon-longitude-latitude". Il y a d'autres conventions, par exemple "rayon-longitude-colatitude" : pour ce choix, la notation habituelle est θ pour la colatitude, elle varie entre 0 et π et φ est la longitude. On aura dans ce cas, les coordonnées sphériques (r, φ, θ) et les coordonnées du point

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$$



où la longitude $\varphi \in [0,\ 2\pi]$ et la colatitude $\theta \in [0, \pi]$. ($\theta = 0$ vers le pôle nord, $\theta = \pi$ vers le pôle sud). Ces coordonnées sphériques donnent (pour élément de volume) $\boxed{dxdydz = r^2\sin\theta\, drd\varphi d\theta}$.
Pour s'adapter au contexte, il vaut mieux se rappeler de la méthode plutôt que d'apprendre les formules par coeur.

La formule de changement de variables devient dans ce cas :

6.0.29 THÉORÈME (PASSAGE EN COORDONNÉES SPHÉRIQUES ("RAYON-LONGITUDE-COLATITUDE")) Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *une fonction continues sur* $\Omega = h(\Omega')$ domaines réguliers de $\mathbb{R}^3$. Alors on a

$$\boxed{\iiint_{\Omega} f(x,\ y,\ z)\ dxdydz = \iiint_{\Omega'} f(r\cos\theta\sin\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\varphi)\ r^2\sin\varphi drd\theta d\varphi.}$$

6.0.30 EXEMPLE (VOLUME D'UNE BOULE DE RAYON R). Quitte à faire une translation, on peut supposer que la boule B_R de rayon R est centrée à l'origine. Elle est représentée, en coordonnées sphériques, par

$$B'_R = \left\{(r,\theta,\varphi,)|\ r \in [0,\ R],\ \ \theta \in [0,\ 2\pi],\ \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\right\} = [0,\ R] \times [0,\ 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

Puisque $dxdydz = r^2\cos(\varphi)drd\theta d\varphi$ on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(B_R) &= \iiint_{B_R} dxdydz = \iiint_{B'_R} r^2\cos\varphi drd\theta d\varphi = \int_0^R r^2dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\varphi)d\varphi \\ &= [\frac{r^3}{3}]_0^R \times [\theta]_0^{2\pi} \times [\sin(\varphi)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{R^3}{3} \times 2\pi \times 2 = \frac{4\pi R^3}{3}.\end{aligned}$$