Introduction:

Calcul différentiel et intégrales multiples (Licence SPM L2)

Présentation enseignants
Jizhuang SHIH et Karim BEKKA

15 semaines de CM et TD: (soit 22,5h de cours, 22,5h de TD)

4 semaines Part.1(optimisation)
6 semaines Part.2 (intégrale multiple)
5 semaines Part.3 (intégrales cuvilignes et intégrales de surfaces)

Evaluation: 3 Contrôles continus
CC1 le 24 février de 13h15 à 14h45
CC2 le 28 avril de 16h15 à 16h
CT (examen terminal (1er ou seconde session)

Note finale: N = max(CT, (CC1+CC2+2CT)/4)

Les règles suivantes seront appliquées en cas d'absences : en cas d'absence injustifiée à un contrôle la note 0 est attribuée à ce contrôle; les abJ (CC1 ou CC2) donnent lieu à une "neutralisation" de la note: par exemple si on a une abj au CC1, la note finale est max(CT, (CC2+CT)/2).

Plan du cours
1. Extrema locaux et extrema liés (Part. 1)
2. intégrales multiples (Part. 2)
3. Intégrales curvilignes et intégrales de surfaces (Part. 3)

Part I

Calcul Différentiel, Optimisation

Chapter 1

Extrema locaux (ou relatifs)

Une question standard en analyse mathématique, qui a des applications dans divers domaines, est de déterminer où une fonction atteint ses extrema (relatifs ou absolus).

On commence par rappeler cette situation pour les fonctions d'une variable.

Donnons-nous une fonction d'une variable f définie sur $\mathbb{R}$ et de classe C^2.

1.0.1 Théorème (Formule de Taylor à l'ordre 2)

Si f est une fonction deux fois continument dérivable (classe C^2) sur $\mathbb{R}$, il existe c compris entre x et $x+h$ tel que

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(c)$$

Choisissons pour x un point $x = a$ tel que $f'(a) = 0$ et $f''(a) \neq 0$. Alors pour h assez petit, le terme $\frac{h^2}{2} f''(c)$ est du même signe que $f''(a)$. Si par exemple $f''(a) > 0$, on en déduit que f a un minimum local en x.

La recherche pratique des extrema locaux pour une fonction d'une variable se passe donc ainsi:

(i) On recherche les points critiques, i.e. les points a tel que $f'(x) = 0$.

(ii) On étudie la dérivée seconde f'' si a est un point critique et si

si $f''(a) > 0$, alors il y a un minimum local,

si $f''(a) < 0$, alors il y a un maximum local,

si $f''(a) = 0$ il faut approfondir l'étude (en considérant les dérivées d'ordre supérieur).

1.0.2 REMARQUE
Lorsque f n'est plus définie sur $\mathbb{R}$ entier, ou sur un intervalle ouvert, il faudra de plus étudier le comportement de f sur les bords du domaine de définition. Si l'ensemble de départ est compact, on a la garantie de l'existence d'extrema globaux.

1.0.3 EXEMPLE. 1) Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = x$. Alors $f'(x) = 1 \neq 0$, donc f n'a pas d'extremum local (ni d'extremum global) sur $\mathbb{R}$. Par contre, la restriction de f à l'intervalle $[-2, 1]$, admet en $a = -2$ un minimum global, $f(-2) = -2$ et un maximum global en $a = 1$ qui vaut $f(1) = 1$.

2) Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = x^2$. Alors $f'(x) = 2x = 0 \iff x = 0$ et comme $f''(0) = 2 > 0$, alors f admet un unique minimum local en $x = 0$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \geq 0 = f(0)$, ce minimum est aussi un minimum global.

3) Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = x^2 + \cos(x)$. Alors $f'(x) = 2x - \sin(x)$, s'annule en 0, de plus $f''(x) = 2 - \cos(x) \geq 1 > 0$, entraîne que f' est strictement monotone, par suite $f'(x) = 0$ a une unique solution, à savoir $x = 0$. On a vu que $f''(0) > 0$, par suite f à un minimum local en 0, ce minimum est aussi global ($\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$).

1.0.4 DÉFINITION
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction, U ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a \in U$.

On dit que f présente un **minimum local** (respectivement un **maximum local**) au point a si $f(a) \leq f(x)$ (respectivement $f(a) \geq f(x)$) dans un voisinage de a.

On dit que f présente un **extremum local** au point a, si elle présente soit un minimum local, soit un maximum local en ce point.

L'extremum local est dit strict s'il existe un voisinage de a où cet extremum n'est réalisé qu'au point a.

On dit que f présente un **extremum global (ou absolu)** au point a, si l'inégalité est vrai pour tout $x \in U$.

1.0.5 REMARQUE
Une fonction f a un extremum local en a si et seulement si $f(x) - f(a)$ a un signe constant au voisinage de a. Le signe est positif si a est un minimum local et négatif si c'est un maximum local.

1.0.6 DÉFINITION
Le *gradient d'une fonction* $f : U \to \mathbb{R}$ *en* $a \in \mathbb{R}^n$ est défini par

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$$

(si les dérivées partielles existent).

1.0.7 DÉFINITION
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable, U ouvert de $\mathbb{R}^n$.
On dit qu'un point $a \in U$ est un point **critique** de f si $\nabla f(a) = \mathbf{0}$. On notera par $Crit(f)$, l'ensemble des points critique de f i.e. $Crit(f) = \{a \in U \mid \nabla f(a) = \mathbf{0}\}$.

1.0.8 EXEMPLE. 1) si $f(x,y) = x + y^2$, alors $Crit(f) = \emptyset$.

2) si $f(x,y) = x^2 + y^2$, alors $Crit(f) = \{(0,0)\}$

3) si $f(x,y) = (x+y)^2$, alors $Crit(f) = \{(x,y) \mid y = -x\}$ est une droite.

1.0.9 THÉORÈME (LA CONDITION NÉCESSAIRE SUR LA DIFFÉRENTIELLE)
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction, U ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a = (a_1 \ldots, a_n) \in U$.
Si f est différentiable et présente un extremum local en a, alors a est un point critique i.e. $\nabla f(a) = \mathbf{0}$.

Démonstration: Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, la fonction partielle d'une variable réelle $f_i(t) = f(a_1 \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1} \ldots, a_n)$ admet un extremum local en a_i, donc sa dérivée

$$\frac{df_i}{dt}(a_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0.$$

On fait de même avec les autres variables. □ ∎

1.0.11 REMARQUE.

1. Le théorème précédent permet de limiter la recherche des extrema locaux aux points critiques.
2. La réciproque est fausse, un point peut être critique sans présenter d'extremum local. Par exemple:

   $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par $f(x,y) = x^2 - y^2$ à $(0,0)$ comme point critique sans être un extremum. En effet, $f(x,0) > f(0,0) > f(0,y)$ si $xy \neq 0$.

1.0.12 DÉFINITION

Un point critique qui n'est pas un extremum local est appelé *point selle (ou col)*.