Introduction

Calcul différentiel et intégrales multiplesLicence SPM L2

Présentation enseignants
Karim BEKKA et Jizhuang SHIH

15 semaines de CM et TD: (soit 22,5h de cours, 22,5h de TD)

3 semaines Part.1
6 semaines Part.2
6 semaines Part.3

Evaluation: 3 Contrôles continus
CC1 le 13 février de 15h à 16h
CC2 le 2 avril de 15h à 16h
CC3 le 14 mai de 14h à 16h

Note finale: N = (CC1+CC2+2CC3)/4

Les règles suivantes seront appliquées en cas d'absences : en cas d'absence injustifiée à un contrôle la note 0 est attribuée à ce contrôle; les abJ donnent lieu à une "neutralisation" de la note: par exemple si on a une abj au CC1, la note finale est (CC2+2CC3)/3

Plan du cours
1. Extrema locaux et extrema liés (Part. 1)
2. intégrales multiples (Part. 2)
3. Intégrales curvilignes et intégrales de surfaces (Part. 3)

Part I

Calcul Différentiel

Chapter 1

Extrema locaux (ou relatifs)

Donnons-nous une fonction d'une variable f définie sur $\mathbb{R}$ et de classe C^2.

1.0.1 Théorème (Formule de Taylor à l' ordre 2)

Si f est une fonction deux fois continument dérivable (C^2) sur $\mathbb{R}$, il existe c compris entre x et $x + h$ telle que

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(c)$$

Choisissons pour x un point $x = a$ tel que $f''(a) \neq 0$. Alors pour h assez petit, le terme $\frac{h^2}{2} f''(c)$ est du même signe que $f''(a)$. Si par exemple $f''(a) > 0$, on en déduit que f a un minimum local en x.

La recherche pratique des extrema locaux pour une fonction d'une variable se passe donc ainsi:

(i) On recherche les points critiques, i.e. les point a tel que $f'(x) = 0$.

(ii) On étudie la dérivée seconde f'' si a est un point critique et si

$f''(a) > 0$ il y a un minimum local,

$f''(a) < 0$ il y a un maximum local,

$f''(a) = 0$ il faut approfondir l'étude.

Lorsque f n'est plus définie sur $\mathbb{R}$ entier, ou sur un intervalle ouvert, il faudra de plus étudier le comportement de f sur les bords du domaine de définition. Si l'ensemble de départ est compact, on a la garantie de l'existence d'extrema globaux.

1.0.2 Définition

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction, U ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a \in U$.

On dit que f présente un **minimum local** (respectivement un **maximum local**) au point a si $f(a) \leq f(x)$ (respectivement $f(a) \geq f(x)$) dans un voisinage de a.

On dit que f présente un **extremum local** au point a, si elle présente soit un minimum local, soit un maximum local en ce point.

L'extremum local est dit strict s'il existe un voisinage de a où cet extremum n'est réalisé qu'au point a.

On dit que f présente un **extremum global (ou absolu)** au point a, si l'inégalité est vrai pour tout $x \in U$.

1.0.3 REMARQUE
Une fonction f a un extremum local en a si et seulement si $f(x) - f(a)$ a un signe constant au voisinage de a. Le signe est positif si a est un minimum local et négatif si c'est un maximum local.

1.0.4 DÉFINITION
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable, U ouvert de $\mathbb{R}^n$.
On dit qu'un point $a \in U$ est un point **critique** de f si $\nabla f(a) = \mathbf{0}$.

1.0.5 THÉORÈME (LA CONDITION NÉCESSAIRE SUR LA DIFFÉRENTIELLE)
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction, U ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a = (a_1 \ldots, a_n) \in U$.
Si f est différentiable et présente un extremum local en a, alors a est un point critique i.e. $\nabla f(a) = \mathbf{0}$.

Démonstration: Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, la fonction partielle d'une variable réelle $f_i(t) = f(a_1 \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1} \ldots, a_n)$ admet un extremum local en a_i, donc sa dérivée

$$\frac{df_i}{dt}(a_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0.$$

On fait de même avec les autres variables. □

1.0.7 REMARQUE.
1. Le corollaire précédent permet de limiter la recherche des extrema locaux aux points critiques.
2. La réciproque est fausse, un point peut être critique sans présenter d'extremum local. Par exemple:

   $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par $f(x, y) = x^2 - y^2$ à $(0, 0)$ comme point critique sans être un extremum. En effet, $f(x, 0) > f(0, 0) > f(0, y)$ si $xy \neq 0$.

1.0.8 DÉFINITION
Un point critique de f qui n'est pas un extremum local est dit *point selle (ou col)*.

1.0.1 Extrema locaux de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

On suppose f de classe C^2, c'est-à-dire que ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2 existent et sont continues.

1.0.9 DÉFINITION
f a un minimum (*resp.* maximum) *local en* (x_0, y_0) *s'il existe* $\epsilon > 0$ *tel que*: $\forall (x, y) \in B((x_0, y_0), \epsilon)$ *alors* $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$(*resp.* $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$)

1.0.10 PROPOSITION (CONDITION NÉCESSAIRE)
Si f admet un extremum local en (x_0, y_0) alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$

Démonstration: La fonction de une variable $x \mapsto f(x, y_0)$ admet un extremum local en x_0, donc sa dérivée $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ en x_0 est nulle. On fait de même avec $y \mapsto f(x_0, y)$.
□ ■

1.0.12 DÉFINITION
Si en (x_0, y_0) on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ on dit que (x_0, y_0) est un point critique de f.

1.0.13 REMARQUE
Un extremum local est un point critique mais la réciproque n'est pas vraie.

1.0.2 Formule de Taylor

1.0.14 DÉFINITION
Soit $f(x, y)$ *une fonction de classe* C^2. La matrice hessienne de f en (x_0, y_0) est la matrice

$$\mathrm{Hess}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

1.0.15 REMARQUE
Puisque f est deux fois différentiable, on a grâce au théorème de Schwarz, on a en tout point (x_0, y_0),

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0).$$