Outils Mathématiques 4

Corrigé du contrôle Continu n^{0}2

Exercice 1

A) 1) La fonction $f(x,y)$ est la somme de deux fonctions à savoir $g(x,y)=xy$ et

$$h(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0);\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

La fonction $g(x,y)=xy$ est une fonction polynomiale donc continue sur $\mathbb{R}^2$.

Comme la somme de deux fonctions continues est une fonction continue, pour montrer que f est continue il suffit de montrer que h est continue.

En utilisant des coordonnées polaires on trouve

$$|h(r\cos\theta, r\sin\theta)| = r|\cos^2\theta\sin\theta| \leq r \to 0 = h(0,0),$$

lorsque $r=\sqrt{x^2+y^2}\to 0$. Donc h est continue en $(0,0)$.

En un point $(x_0,y_0)\neq(0,0)$, $h(x,y)$ est continue comme quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, en effet $x_0^2+y_0^2\neq 0$ si $(x_0,y_0)\neq(0,0)$. Donc h est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Par suite $f(x,y)=g(x,y)+h(x,y)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.

2) On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=\lim_{x\to 0}0=0$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y}=\lim_{y\to 0}0=0$$

d'où $\nabla f(0,0)=(0,0)$.

B) La distribution de la température dans le plan est donnée par la fonction

$$T(x,y)=10+6\cos(x)\cos(y)+3\cos(2x)+4\cos(2y)$$

1) $T(x,y)$ ets de classe C^1, comme somme de fonctions de classes C^1.
Par suite, la dérivée directionnelle de $T(x,y)$ en un point $=(x_0,y_0)$ et dans une direction $v=(a,b)$ avec $\|v\|=1$ est donnée par $T'_v(x_0,y_0)=\nabla T(x_0,y_0).(a,b)=aT'_x(x,y)+bT'_y(x,y)$.
$T'_x(x,y)=-6\sin(x)\cos(y)-6\sin(2x)$ et $T'_y(x,y)=-6\cos(x)\sin(y)-8\sin(2y)$
d'où $\nabla T(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})=(-\frac{9\sqrt{3}}{2},-\frac{11\sqrt{3}}{2})$ et $\boxed{T'_{(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})}(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})=-\frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=-5\sqrt{6}}$

2) La direction de croissance maximale de la température au point $(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$ est la direction du gradient i.e. $\nabla T(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})=(-\frac{9\sqrt{3}}{2},-\frac{11\sqrt{3}}{2})$.

3) Une valeur approchée de $T(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{3\sqrt{3}},\frac{\pi}{3}-\frac{1}{3\sqrt{3}})$ est donnée par
$T(x,y)\sim T(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})+T'_x(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})(x-\frac{\pi}{3})+(T'_y(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})(y-\frac{\pi}{3})$
D'où $\boxed{T(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{3\sqrt{3}},\frac{\pi}{3}-\frac{1}{3\sqrt{3}})\sim 8+(-\frac{9\sqrt{3}}{2})(-\frac{1}{3\sqrt{3}})+(-\frac{11\sqrt{3}}{2})(-\frac{1}{3\sqrt{3}})=\frac{34}{3}}$.

Exercice 2 Soit $f(x,y) = \cos(xy) - y$ est de classe C^2.

(i) $f'_x(x,y) = -y\sin(xy)$, $f'_y(x,y) = -x\sin(xy) - 1$, $f''_{xx}(x,y) = -y^2\cos(xy)$,
$f''_{yx}(x,y) = f''_{xy}(x,y) = -\sin(xy) - xy\cos(xy)$ et $f''_{yy}(x,y) = -x^2\cos(xy)$.

(ii) Au point $(0,1)$ on a $f'_x(0,1) = 0$, $f'_y(0,1) = -1$, $f''_{xx}(0,1) = -1$, $f''_{yx}(0,1) = 0$ et $f''_{yy}(0,1) = 0$ d'où le développement limité à l'ordre 2 de $f(x,y)$ au voisinage de $(0,1)$: $f(x,y) \sim -(y-1) - \frac{x^2}{2}$.

(iii) En utilise la question précédente pour donner une valeur approchée de $f(\frac{1}{10}, \frac{9}{10})$:
$\boxed{f(\frac{1}{10}, \frac{9}{10}) \sim -(\frac{9}{10} - 1) - \frac{(\frac{1}{10})^2}{2} = 0,1 - 0,005 = 0,095}$.

(iv) On vérifie aisément que $f(0,1) = \cos(0) - 1 = 0$ et que $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = -x\sin(xy) - 1|_{(0,1)} = -1 \neq 0$; d'après le théorème des fonctions implicites, l'équation $f(x,y) = 0$ définie implicitement au voisinage de $(0,1)$ y en fonction de x , il existe donc un voisinage V de $x = 0$ et une fonction φ définie dans V telle que (x,y) vérifie la relation $f(x,y) = 0$ si et seulement si $y = \varphi(x)$.

(v) De la relation $f(x, \varphi(x)) = 0$ sur le voisinage V de $x = 0$ on obtient.

(a) $\varphi(0) = 1$

(b) $\varphi'(0) = -\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)} = -\dfrac{-y\sin(xy)|_{(0,1)}}{-x\sin(xy) - 1|_{(0,1)}} = -\dfrac{0}{-1} = 0$

(c) $f(x,\varphi(x)) = \cos(x\phi(x)) - \varphi(x) = 0$ dans un voisinage de $x = 0$.

En dérivant deux fois $\cos(x\phi(x)) - \phi(x)$ par rapport à x, on obtient

$$-(x\varphi'(x) + \varphi(x))^2\cos(x\phi(x)) - ((\varphi'(x))^2 + x\varphi''(x))\sin(x\varphi(x)) = \varphi''(x) = 0.$$

En évaluant cette dernière relation en $x = 0$ $\varphi(0) = 1$ et $\varphi'(0) = 0$, on obtient : $-1 - \varphi''(0) = 0$ d'où $\varphi''(0) = -1$.

(vi) Le développement limité de φ à l'ordre 2 en $x = 0$ est donné par :

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)x + \frac{\varphi''(0)}{2}x^2 + x^2\epsilon(x)$$

avec $\lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0$. Donc $\boxed{\varphi(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)}$

En utilisant le développement limité de φ à l'ordre 2 en $x = 0$ on obtient

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x) - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-x^2}{2} + x^2\epsilon(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} -\frac{1}{2} + \lim_{x\to 0}\epsilon(x) = -\frac{1}{2}}.$$

Remarque : On pouvait utiliser le développement de $f(x,y)$ dans (ii) pour obtenir celui de $\varphi(x)$, en effet, $0 = f(x,\varphi(x)) \sim -(\varphi(x) - 1) - \frac{x^2}{2}$ d'où $\varphi(x) \sim 1 - \frac{x^2}{2}$.