

1ère année de licence de biologie
“Analyse”
Feuille d'exercices n°4. Equations différentielles.

1 Résolution d'équations d'ordre 1

Résoudre les équations différentielles suivantes:

- (a) $y' + y = 6$
- (b) $y'(x) = -y(x) \sin(x)$
- (c) $y'(x) = y(x) + e^{3x}$
- (d) $y'(x) \tan(x) = y(x)$
- (e) $y'(x) = 2xy(x) + x^3$
- (f) $\begin{cases} y'(t) - 2y(t) = 2t^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$
- (g) $\begin{cases} y'(t) + y(t) = \cos t \\ y(0) = 0 \end{cases}$

2 Résolution d'équations d'ordre 2

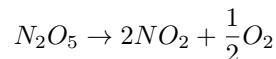
Résoudre les équations différentielles suivantes:

- (a) $y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = 0$
- (b) $y''(x) - 9y(x) = 0$
- (c) $y''(x) + y'(x) = 0$
- (d) $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = 0$
- (e) $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = x^2$

(chercher une solution particulière $y_p(x)$ du type polynôme)

3 Application

1. Il est démontré expérimentalement que si la réaction chimique



se produit à 45 degrés, le taux de réaction du pentoxyde d'azote est proportionnel à sa concentration selon la formule

$$-\frac{d[N_2O_5]}{dt} = -0,0005 [N_2O_5]$$

Exprimer la concentration $[N_2O_5]$ après T secondes sachant que la concentration initiale est C .

2. Une membrane de cellule a une capacité C et une résistance R . L'équation qui connecte la charge q au potentiel transmembrane E est

$$E = R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$$

Si $q = Q$ quand $t = 0$, montrer que pour toute valeur de t ,

$$q(t) = EC - (EC - Q)e^{-t/(RC)}$$

4 Compléments

1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y'(x) + 6y(x) = (1+x)e^{-2x}$

b)
$$\begin{cases} y'(x) - 3y(x) = e^x \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} y'(x) - y(x) = 2 \sin x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

2. Résoudre les équations différentielles suivantes:

(a) $y''(x) - y'(x) + y(x) = x^2 + 6$

(chercher une solution particulière $y_p(x)$ du type polynôme)

(b) $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = e^x + e^{-x}$

(une solution particulière $y_p(x)$ est $y_p(x) = y_{p,1}(x) + y_{p,2}(x)$ où $y_{p,1}(x)$ est solution particulière de $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = e^x$ et $y_{p,2}(x)$ est solution particulière de $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = e^{-x}$)

3. On tente de modéliser la manière dont une rumeur se répand en considérant que la vitesse de propagation est proportionnelle au produit de la fraction y de ceux qui sont au courant de la rumeur par la fraction de ceux qui, au contraire, ne sont pas au courant.

(a) Ecrire une équation différentielle vérifiée par y .

(b) En déduire une équation différentielle vérifiée par $z = \frac{1}{y}$.

(c) Résoudre l'équation vérifiée par z et en déduire y .

(d) Une petite ville compte 1000 habitants. A 8 heures du matin, 80 personnes ont entendu parler de la nouvelle du jour. A midi, la moitié de la ville est au courant. Quand est-ce que 90% de la population saura ?