Université de Rennes
Département de Mathématiques Année 2015-2016

1ère année de licence de biologie
“Analyse"
Feuille d'exercices n^{o}4. Equations différentielles.

1 Résolution d'équations d'ordre 1

Résoudre les équations différentielles suivantes:

(a) $y' + y = 6$

(b) $y'(x) = -y(x)\sin(x)$

(c) $y'(x) = y(x) + e^{3x}$

(d) $y'(x)\tan(x) = y(x)$

(e) $y'(x) = 2xy(x) + x^3$

(f) $\begin{cases} y'(t) - 2y(t) = 2t^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} y'(t) + y(t) = \cos t \\ y(0) = 0 \end{cases}$

2 Résolution d'équations d'ordre 2

Résoudre les équations différentielles suivantes:

(a) $y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = 0$

(b) $y''(x) - 9y(x) = 0$

(c) $y''(x) + y'(x) = 0$

(d) $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = 0$

(e) $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = x^2$

(*chercher une solution particulière $y_p(x)$ du type polynôme*)

3 Application

1. Il est démontré expérimentalement que si la réaction chimique

$$N_2O_5 \to 2NO_2 + \frac{1}{2}O_2$$

se produit à 45 degrés, le taux de réaction du pentoxyde d'azote est proportionnel à sa concentration selon la formule

$$-\frac{d[N_2O_5]}{dt} = -0,\ 0005\ [N_2O_5]$$

Exprimer la concentration $[N_2O_5]$ après T secondes sachant que la concentration initiale est C.

2. Une membrane de cellule a une capacité C et une résistance R. L'équation qui connecte la charge q au potentiel transmembrane E est

$$E = R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$$

Si $q = Q$ quand $t = 0$, montrer que pour toute valeur de t,

$$q(t) = EC - (EC - Q)e^{-t/(RC)}$$

4 Compléments

1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

   a) $y'(x) + 6y(x) = (1+x)e^{-2x}$

   b) $\begin{cases} y'(x) - 3y(x) = e^{x} \\ y(0) = 2 \end{cases}$

   c) $\begin{cases} y'(x) - y(x) = 2\sin x \\ y(0) = 1 \end{cases}$

2. Résoudre les équations différentielles suivantes:

   (a) $y''(x) - y'(x) + y(x) = x^2 + 6$
   ($chercher\ une\ solution\ particulière\ y_p(x) du\ type\ polynôme$)

   (b) $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = e^{x} + e^{-x}$
   (*une solution particulière* $y_p(x)$ *est* $y_p(x) = y_{p,1}(x) + y_{p,2}(x)$ *où* $y_{p,1}(x)$ *est solution particulière de* $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = e^{x}$ *et* $y_{p,2}(x)$ *est solution particulière de* $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = e^{-x}$)

3. On tente de modéliser la manière dont une rumeur se répand en considérant que la vitesse de propagation est proportionnelle au produit de la fraction y de ceux qui sont au courant de la rumeur par la fraction de ceux qui, au contraire, ne sont pas au courant.

   (a) Ecrire une équation différentielle vérifiée par y.

   (b) En déduire une équation différentielle vérifiée par $z = \dfrac{1}{y}$.

   (c) Résoudre l'équation vérifiée par z et en déduire y.

   (d) Une petite ville compte 1000 habitants. A 8 heures du matin, 80 personnes ont entendu parler de la nouvelle du jour. A midi, la moitié de la ville est au courant. Quand est-ce que 90% de la population saura ?