Université de Rennes
Département de Mathématiques Année 2015-2016

1ère année de licence de biologie
“Analyse"
Feuille d'exercices n^{o}4. Equations différentielles.

1 Equation différentielle du premier ordre

$$y' = a(x)y + b(x) \tag{E}$$

sont toutes de la forme $y = y_h + y_p$ où y_h est solution de

$$y' = a(x)y. \tag{E_1}$$

et y_p est une solution particulière de (E).

En d'autres termes
Solution générale = solution de l'équation homogène + solution particulière.

— Les solutions de (E_1) sont $y_g(t) = \lambda e^{A(x)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, où $A(x) = \int a(x)\,dx$.

— une solution particulière est donéée par, la méthode de la variation de la constante, $y_p = e^{A(x)} \int b(x)e^{-A(x)}\,dx$.

2 Résolution d'équations d'ordre 1

Résoudre les équations différentielles suivantes:

(a) $y' + y = 6$
Solution: Les solutions de l'équation homogène $y' + y = 0$ sont $y_h(x) = Ce^{-x}$, $C \in \mathbb{R}$.

On cherche une solution particulière de type $y = a$, alors $y' = 0$ et donc $y' + y = a$, ainsi $y = 6$ est solution de l'équation $y' + y = 6$.

D'où la solution générale de $y' + y = 6$ est $\boxed{y(x) = Ce^{-x} + 6}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

(b) $y'(x) = -y(x)\sin(x)$
Solution: On a $a(x) = -\sin(x)$ d'où $A(x) = \int a(x)\,dx = \int -\sin(x)\,dx = \cos(x)$ et les solutions de l'équation (homogène) $y' = -y(x)\sin(x)$ sont $\boxed{y_h(x) = Ce^{\cos(x)},\ C \in \mathbb{R}.}$

(c) $y'(x) = y(x) + e^{3x}$
Solution: Les solutions de l'équation homogène $y' = y$ sont $y_h(x) = Ce^x$, $C \in \mathbb{R}$.

On cherche une solution particulière par la méthode de la variation de la constante, on a $b(x) = e^{3x}$ alors $\int b(x)e^{-A(x)}\,dx = \int e^{3x}e^{-x}\,dx = \int e^{2x}\,dx = \frac{e^{2x}}{2}$, d'où $y_p = e^{A(x)} \int b(x)e^{-A(x)}\,dx = e^x.\frac{e^{2x}}{2} = \frac{e^{3x}}{2}$.

D'où la solution générale de $y'(x) = y(x) + e^{3x}$ est $\boxed{y(x) = Ce^x + \frac{e^{3x}}{2}}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

(d) $y'(x)\tan(x) = y(x)$
Solution:

L'équation homogène est $y' = \frac{1}{\tan(x)}y = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}y$

on a alors $a(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u = \sin(x)$ d'où $A(x) = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,dx = \int \frac{du}{u}\,dx = \ln(|u|) = \ln(|\sin(x)|)$.

Ainsi les solutions de $y'(x)\tan(x) = y(x)$ sont $\boxed{y_h(x) = Ce^{\ln(\sin(x))} = C\sin(x),\ C \in \mathbb{R}.}$

(e) $y'(x) = 2xy(x) + x^3$
Solution: Les solutions de l'équation homogène $y' = 2xy$ sont $y_h(x) = Ce^{x^2}$, $C \in \mathbb{R}$.

On cherche une solution particulière par la méthode de la variation de la constante, on a $b(x) = x^3$ alors $\int b(x)e^{-A(x)}\,dx = \int x^3e^{-x^2}\,dx$, une intégration par parties (voir exercice 1 (2-e) de la feuille 3) donne $\int x^3e^{-x^2}\,dx = -\frac{x^2e^{-x^2}}{2} - \frac{e^{-x^2}}{2} = -\frac{e^{-x^2}}{2}(x^2+1)$ d'où $y_p = e^{A(x)} \int b(x)e^{-A(x)}\,dx = -e^{x^2}\frac{e^{-x^2}}{2}(x^2+1) = -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$.

D'où la solution générale de $y'(x) = 2xy(x) + x^3$ est $\boxed{y(x) = Ce^{x^2} - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

(f) $y'(x)\tan(x) = y(x)$
Solution:
Léquation homogène est $y' = \frac{1}{\tan(x)}y = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}y$, on a alors $a(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u = \sin(x)$ d'où $A(x) = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,dx = \int \frac{du}{u}\,dx = \ln(|u|) = \ln(|\sin(x)|)$.

Ainsi les solutions de $y'(x)\tan(x) = y(x)$ sont $\boxed{y_h(x) = Ce^{\ln(\sin(x))} = C\sin(x),\ C \in \mathbb{R}.}$

(g) $\begin{cases} y'(t) - 2y(t) = 2t^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Solution: Les solutions de l'équation homogène $y' = 2y$ sont $y_h(t) = Ce^{2t}$, $C \in \mathbb{R}$.
Une solution particulière, par la méthode de la variation de la constante, $y_p = e^{A(t)}\int b(t)e^{-A(t)}\,dt = e^{2t}\int 2t^2e^{-2t}\,dt$
Deux intégrations par parties donne $\int b(t)e^{-A(t)}\,dt = \int 2t^2e^{-2t}\,dt = -t^2e^{-2t} + \int 2te^{-2t}\,dt = -t^2e^{-2t} - te^{-2t} - \frac{e^{-2t}}{2}$
d'où $y_p = e^{A(t)}\int b(t)e^{-A(t)}\,dt = e^{2t}\int 2t^2e^{-2t}\,dt = -t^2 - t - \frac{1}{2}$

La solution générale de $y'(t) - 2y(t) = 2t^2$ est alors $\boxed{y(t) = Ce^{2t} - t^2 - t - \frac{1}{2},\ C \in \mathbb{R}.}$

La condition initiale $y(0) = 1$ donne $C - \frac{1}{2} = 1$ c-à-d $C = \frac{3}{2}$ et la solution $\boxed{y(t) = \frac{3}{2}e^{2t} - t^2 - t - \frac{1}{2}.}$

(h) $\begin{cases} y'(t) + y(t) = \cos t \\ y(0) = 0 \end{cases}$
Solution: Les solutions de l'équation homogène $y' = -y$ sont $y_h(t) = Ce^{-t}$, $C \in \mathbb{R}$.
Une solution particulière, par la méthode de la variation de la constante, $y_p = e^{A(t)}\int b(t)e^{-A(t)}\,dt = e^{-t}\int \cos(t)e^t\,dt$.
Deux intégrations par parties donne $\int cos(t)e^t\,dt = e^t.\frac{\cos(t)+\sin(t)}{2}$ d'où $y_p = e^{A(t)}\int b(t)e^{-A(t)}\,dt = e^{-t}e^t.\frac{\cos(t)+\sin(t)}{2} = \frac{\cos(t)+\sin(t)}{2}$.

La solution générale de $y'(t) + y(t) = \cos(t)$ est alors $\boxed{y(t) = Ce^{-t} + \frac{\cos(t)+\sin(t)}{2},\ C \in \mathbb{R}.}$

La condition initiale $y(0) = 0$ donne $C - \frac{1}{2} = 0$ c-à-d $C = \frac{1}{2}$ et la solution $\boxed{y(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{\cos(t)+\sin(t)}{2}.}$

3 Equation différentielle du second ordre

On veut résoudre l'équation différentielle
$$ay'' + by' + cy = f(x). \tag{E}$$
$a \neq 0$. On lui associe l'équation *homogène*
$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{E_1}$$
On a encore

solution générale = solution de l'équation sans second membre + solution particulière.

Pour résoudre l'équation (E_1), on regarde l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$. On cherche ses racines. Pour cela, on calcule son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ et on distingue trois cas

1. si $\Delta > 0$. L'équation caractéristique a deux racines simples $r_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$. Les solutions de (E_1) sont alors
$$y_h(x) = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$
2. si $\Delta = 0$. L'équation caractéristique a une racine double $r_0 = \frac{-b}{2a}$. Les solutions de (E_1) sont alors
$$y_h(x) = (Ax + B)e^{r_0x}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$
3. si $\Delta < 0$. L'équation caractéristique a deux racines *complexes*
$r_1 = \frac{-b}{2a} - i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \frac{-b}{2a} + i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$. Les solutions de (E_1) sont alors
$$y_h(x) = \left(A\cos\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}x + B\sin\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}x\right)e^{-\frac{b}{2a}x}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

4 Résolution d'équations d'ordre 2

Résoudre les équations différentielles suivantes:

(a) $y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = 0$

Solution: L'équation caractéristique $r^2-5r+6 = 0$ a pour discriminant $25-24 = 1 > 0$, donc deux racines réelles distinctes $r_1 = 2$ et $r_2 = 3$, d'où les solutions de $y''(x)-5y'(x)+6y(x) = 0$ sont $\boxed{y(x) = Ae^{2x} + Be^{3x}, \quad A, B \in \mathbb{R}.}$

(b) $y''(x) - 9y(x) = 0$
Solution: L'équation caractéristique $r^2 - 9 = 0$ c-à-d $r^2 = 9$ a donc deux racines réelles distinctes $r_1 = 3$ et $r_2 = -3$, d'où les solutions de $y''(x) - 9y(x) = 0$ sont $\boxed{y(x) = Ae^{3x} + Be^{-3x}, \quad A, B \in \mathbb{R}.}$

(c) $y''(x) + y'(x) = 0$
Solution: L'équation caractéristique $r^2 + r = 0$ c-à-d $r(r + 1) = 0$ a donc deux racines réelles distinctes $r_1 = 0$ et $r_2 = -1$, d'où les solutions de $y''(x) + y'(x) = 0$ sont $\boxed{y(x) = A + Be^{-x}, \quad A, B \in \mathbb{R}.}$

(d) $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = 0$
Solution: L'équation caractéristique $r^2 - 2r + 2 = 0$ a pour discriminant $\Delta = -8 = -4 < 0$, et a donc deux racines complexes conjuguées $r_1 = 1 - i$ et $r_2 = 1 + i$, d'où les solutions de $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = 0$ sont $\boxed{\left(A\cos\frac{\sqrt{4}}{2}x + B\sin\frac{\sqrt{4}}{2}x\right)e^{-\frac{-2}{2}x} = (A\cos(x) + B\sin(x))\,e^{x}, \quad A, B \in \mathbb{R}.}$

(e) $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = x^2$
Solution: L'équation caractéristique $r^2 - 4r + 4 = 0$ a pour discriminant $16 - 16 = 0$, donc une racine réelles double $r_0 = 2$, d'où les solutions de $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = 0$ sont $\boxed{y_h(x) = (Ax + B)e^{2x}, \quad A, B \in \mathbb{R}.}$

On cherche une solution de type polynôme $y_p = ax^2 + bx + c$; $y_p' = 2ax + b$ et $y"_p = 2a$

Ainsi $y_p''(x) - 4y_p'(x) + 4y_p(x) = x^2$ est équivalent à $2a - 4(2ax + b) + 4(ax^2 + bx + c) = x^2$ c-à-d $(4a - 1)x^2 + (4b - 8a)x + (2a - 4b + 4c) = 0$ e qui revient à résoudre le système: $\begin{cases} 4a - 1 = 0 \Longrightarrow a = \frac{1}{4} \\ 4b - 8a = 0 \Longrightarrow b = 2a = \frac{1}{2} \\ 2a - 4b + 4c = 0 \Longrightarrow c = \frac{4b-2a}{4} = \frac{3}{8} \end{cases}$

D'où $y_p = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}$.

Par suite la solution générale de $y''(x)-4y'(x)+4y(x) = x^2$ est $\boxed{y(x) = (Ax + B)e^{2x} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}, \quad A, B \in \mathbb{R}}$

5 Application

1. **Solution:** D'après la formule donnée, la concentration de $[N_2O_5]$ est solution de l'équation différentielle homogène $-y'(t) = -0,0005\ y(t)$ c-à-d $y'(t) = 0,0005\ y(t)$

   qui a pour solution $y(t) = Ae^{0,0005t}$ avec $A \in \mathbb{R}$.

   La condition initiale $y(0) = C$, entraîne que $A = C$ par suite la concentration de $[N_2O_5]$ après T secondes est $Ce^{0,0005T}$.

2. **Solution:** On sait que $q(t)$ est solution de $E = Ry' + \frac{1}{C}y$ c-à-d solution de $y' = -\frac{1}{RC}y + \frac{E}{R}$

   L'équation homogène $y' = -\frac{1}{RC}y$ à pour solution générale $y_h(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}}$ avec $A \in \mathbb{R}$.

   Comme $\frac{E}{R}$ est une constante, on cherche une solution particulière de $y' = -\frac{1}{RC}y + \frac{E}{R}$ de type constante et on trouve $y_p = EC$.

   Ainsi, la solution générale de $y' = -\frac{1}{RC}y + \frac{E}{R}$ est $y(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}} + EC$ avec $A \in \mathbb{R}$

   c-à-d que $q(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}} + EC$.

   La condition initiale $q(0) = Q$, entraîne que $Q = A+EC$ c-à-d que $A = Q-EC$, d'où $\boxed{q(t) = EC - (EC - Q)e^{-\frac{t}{RC}}}$.