Université de Rennes
Département de Mathématiques Année 2015-2016

1ère année de licence de biologie
“Analyse"
Feuille d'exercices n^{o}3. Primitives.

Exercice 1 (Calculs de primitives) *Calculer les primitives suivantes:*

(1) par linéarité

- *(a)* $\displaystyle\int 7x^5 + 2x + 1\,dx$
- *(b)* $\displaystyle\int e^{3x+5}\,dx$
- *(c)* $\displaystyle\int \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 dx$
- *(d)* $\displaystyle\int \sin^2(x) + \sin(2x)\,dx$

(2) par intégration par parties

- *(a)* $\displaystyle\int x^2 \ln(x)\,dx$
- *(b)* $\displaystyle\int \ln(2x)\,dx$
- *(c)* $\displaystyle\int x\sin(x)\,dx$
- *(d)* $\displaystyle\int \sin(x)\ln(\cos(x))\,dx$
- *(e)* $\displaystyle\int x^3 e^{-x^2}\,dx$

(3) du type $\displaystyle\int u'(x) f(u(x))\,dx$*:*

- *(a)* $\displaystyle\int \frac{x^5}{1+x^6}\,dx$
- *(b)* $\displaystyle\int \sin(x)\cos(x)\,dx$
- *(c)* $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx$
- *(d)* $\displaystyle\int x\exp(x^2)\,dx$
- *(e)* $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{\sqrt{9-2\sin(x)}}\,dx$

(4) à l'aide du changement de variable proposé:

- *(a)* $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$ *avec* $u = \sqrt{x+1}$
- *(b)* $\displaystyle\int \frac{1}{3x^2+2}\,dx$ *avec* $u = \sqrt{\tfrac{3}{2}}x$
- *(c)* $\displaystyle\int e^x \sin(e^x)\,dx$ *avec* $u = e^x$
- *(d)* $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$ *avec* $x = sin(u)$.
- *(e)* $\displaystyle\int \sin(2x)e^{\sin^2(x)}\,dx$ *avec* $u = \sin^2(x)$.

Exercice 2 *Calculer les intégrales suivantes:*

$$1.\ \int_{-1}^{0} x^3+2x-1\,dx \qquad 2.\ \int_{0}^{2} e^x\,dx$$

$$3.\ \int_{-2}^{1} x(2x^2+1)\,dx \qquad 4.\ \int_{\ln 2}^{\ln 3} e^{2x+1}\,dx$$

$$5.\ \int_{-2}^{1} \sqrt{x+3}\,dx \qquad 6.\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 4x\,dx$$

$$7.\ \int_{0}^{1} \frac{1}{(2x+1)^2}\,dx \qquad 8.\ \int_{0}^{2} xe^{-x^2}\,dx$$

Exercice 3 (Applications) .

1) *Trouver les constantes* a, b *et* c *telles que*

$$\frac{x^2+1}{x-1} = ax+b+\frac{c}{x-1},\ \textit{pour } x \neq 1;$$

En déduire des primitives de cette fonction sur les intervalles $]-\infty,1[$ *et* $]1,+\infty[$, *puis calculer l'intégrale*

$$I = \int_{2}^{3} \frac{x^2+1}{x-1}\,dx.$$

2) *Une substance commence à entrer dans la circulation sanguine d'un chat au temps* $t = 0$. *D'après un modèle théorique, le taux d'accroissement de la substance a 1'intérieur de la circulation est donné par la formule*

$$\dot{y} = A\exp(-\theta t) - B\exp(-\lambda t)$$

où $\dot{y}$ *est le taux d'accroissement de la substance en circulation au temps* t, A, B, θ *et* λ *sont des constantes.*

Déterminer une expression pour la quantité totale de substance en circulation en tout temps T.

3) *Une population d'animaux augmente à la vitesse de* $200+50t$ *(* t *en années). De combien la population a-t-elle augmenté entre la quatrième et la dixième année ?*

4) *Une population de bactéries d'initialement 400 unités croit à la vitesse de* $450,268 \times e^{1,12567t}$ *bactéries par heure. Quel est l'effectif de cette population après trois heures ?*

Exercice 4 (Compléments) .

1) *Calculer les primitives suivantes*

   (a) $\int (x^3+\frac{1}{x^2})^4 dx$

   (b) $\int \ln(x^2+1)dx$

   (c) $\int x^3\ln(x)dx$

   (d) $\int x^2e^x dx$

2) *Soit la fonction* $f\,:\,x \to \dfrac{2x+3}{(x-3)^2}$ *définie sur* $\mathbb{R}\backslash\{3\}$.

   1) *Déterminer les réels* a *et* b *tels que* $f(x) = \dfrac{a}{x-3}+\dfrac{b}{(x-3)^2}$

   2) *Calculer* $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)dx$.

3) *Déterminer l'aire de l'ensemble des points du plan délimité par les courbes représentatives dans un repère orthonormé des fonctions* f *et* g *définies par*

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{4} \\ g(x) = -\frac{x^2}{4}+x+12 \end{cases}$$