Université de Rennes
Département de Mathématiques
Année 2015-2016

1ère année de licence de biologie
“Analyse"
Feuille d'exercices n^{o}3. Primitives.

Exercice 1 (Calculs de primitives) *Calculer les primitives suivantes:*

(1) **Solution:**

(a) $\displaystyle\int 7x^5+2x+1\,dx=\frac{7}{6}x^6+x^2+x+C$; *$C$ constante réelle arbitraire.*

(b) $\displaystyle\int e^{3x+5}\,dx=e^5\int e^{3x}\,dx=e^5\frac{e^{3x}}{3}+C=\frac{e^{3x+5}}{3}+C$

(c) $\displaystyle\int\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2dx=\int\left(x^4+2+\frac{1}{x^4}\right)dx=\frac{x^5}{5}+2x-\frac{1}{3x^3}+C$

(d) $\displaystyle\int\sin^2(x)+\sin(2x)\,dx=\int\sin^2(x)\;dx+\int\sin(2x)\,dx=\int\frac{1-\cos(2x)}{2}\;dx+\int\sin(2x)\,dx$
$\displaystyle=\frac{x}{2}-\frac{\sin(2x)}{4}-\frac{\cos(2x)}{2}+C$

(2) par intégration par parties $\int u'v=uv-\int uv'$

Solution:

(a) *On pose* $u'=x^2, v=\ln(x)$; *donc* $u=\frac{x^3}{3}, v'=\frac{1}{x}$
$\displaystyle\int x^2\ln(x)\,dx=\frac{x^3\ln(x)}{3}-\frac{1}{3}\int x^2\,dx=\frac{x^3\ln(x)}{3}-\frac{x^3}{9}+C$

(b) *On pose* $u'=1, v=\ln(2x)$; *donc* $u=x, v'=\frac{1}{x}$
$\displaystyle\int\ln(2x)\,dx=x\ln(2x)-\int\;dx=x\ln(2x)-x+C$

(c) *On pose* $u'=\sin(x), v=x$; *donc* $u=-\cos(x), v'=1$

$$\int x\sin(x)\,dx=-x\cos(x)+\int\cos(x)\;dx=-x\cos(x)+\sin(x)+C$$

(d) *On pose* $u'=\sin(x), v=\ln(\cos(x))$; *donc* $u=-\cos(x), v'=\frac{-\sin(x)}{\cos(x)}$

$$\int\sin(x)\ln(\cos(x))\,dx=-\cos(x)\ln(\cos(x))-\int-\cos(x)\frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\;dx$$
$$=-\cos(x)\ln(\cos(x))-\int\sin(x)\;dx=-\cos(x)\ln(\cos(x))+\cos(x)+C$$

(e) *Pour calculer cette primitive, on remarque que la dérivée de* e^{-x^2} *est égale à* $-2xe^{-x^2}$, *on écrit alors*
$\displaystyle\int x^3e^{-x^2}\;dx=\int\frac{x^2}{-2}(-2xe^{-x^2})\,dx$
on pose alors $u'=-2xe^{-x^2},\ v=\frac{x^2}{-2}$; *donc* $u=e^{-x^2}, v'=-x$
$\displaystyle\int x^3e^{-x^2}\;dx=\int\frac{x^2}{-2}(-2xe^{-x^2})\,dx=\frac{x^2e^{-x^2}}{-2}+\int xe^{-x^2}\;dx=-\frac{x^2e^{-x^2}}{2}-\frac{e^{-x^2}}{2}+C$

(3) du type $\displaystyle\int u'(x)f(u(x))\,dx$:

(a) *La fonction à intégrer est de la forme* $k\frac{u'}{u}$ *dont la primitive est* $k\ln(|u|)$ *où* $u=1+x^6$ *et donc* $u'=6x^5$
$\displaystyle\int\frac{x^5}{1+x^6}\,dx=\frac{1}{6}\int\frac{6x^5}{1+x^6}\,dx=\frac{1}{6}\ln(|u|)+C=\frac{1}{6}\ln(1+x^6)+C.$

(b) *La fonction à intégrer est de la forme* $ku'u$ *dont la primitive est* $k\frac{u^2}{2}$ *où* $u=\sin(x)$ *et donc* $u'=\cos(x)$
$\displaystyle\int\sin(x)\cos(x)\,dx=\int u'u\;dx=\int u\;du=\frac{u^2}{2}+C=\frac{(\sin(x))^2}{2}+C.$

(c) *La fonction à intégrer est de la forme* $ku'u$ *dont la primitive est* $k\frac{u^2}{2}$ *où* $u=\ln(x)$ *et donc* $u'=\frac{1}{x}$
$\displaystyle\int\frac{\ln(x)}{x}\,dx=\int u'u\;dx=\int u\;du=\frac{u^2}{2}+C=\frac{(\ln(x))^2}{2}+C.$

(d) *La fonction à intégrer est de la forme $ku'e^u$ dont la primitive est ke^u où $u = x^2$ et donc $u' = 2x$*

$$\int x\exp(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int 2x\exp(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int u'e^u\ dx = \int e^u du = e^u + C = \frac{\exp(x^2)}{2} + C.$$

(e) *La fonction à intégrer est de la forme $ku'u^\alpha$ dont la primitive est $k\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ où $\alpha = -\frac{1}{2}$, $u = 9 - 2\sin(x)$ et donc $u' = -2\cos(x)$*

$$\int \frac{\cos(x)}{\sqrt{9-2\sin(x)}}\,dx = \frac{1}{-2}\int \frac{-2\cos(x)}{\sqrt{9-2\sin(x)}}\,dx = \frac{1}{-2}\int u'u^{\frac{-1}{2}}\ dx = \frac{1}{-2}\int u^{\frac{-1}{2}}\ du = \frac{-1}{2}\left(\frac{u^{\frac{-1}{2}+1}}{\frac{-1}{2}+1}\right) + C =$$
$$\frac{-1}{2}\left(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right) + C = -u^{\frac{1}{2}} + C = -\sqrt{9-2\sin(x)} + C.$$

(4) *à l'aide du changement de variable proposé:*

Solution:

(a) *On pose $u = \sqrt{x+1}$, alors $u^2 = x+1$ donc $x = u^2 - 1$ et $dx = 2udu$;*

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx = \int \frac{u^2-1}{\sqrt{u^2}}2u\ du = 2\int u^2 - 1\ du = \frac{2}{3}u^3 - 2u + C = \frac{2}{3}(\sqrt{x+1})^3 - 2\sqrt{x+1} + C$$
$$= \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{x+1} + C$$

(b) *On pose $u = \sqrt{\frac{3}{2}}x$, alors $x = \sqrt{\frac{2}{3}}u$ et $dx = \sqrt{\frac{2}{3}}du$;*

$$\int \frac{1}{3x^2+2}\,dx = \int \frac{1}{3\frac{2}{3}u^2+2}\sqrt{\frac{2}{3}}du = \sqrt{\frac{2}{3}}\int \frac{1}{2}\frac{1}{u^2+1}\,du = \sqrt{\frac{1}{6}}\int \frac{1}{u^2+1}\,du$$
$$= \sqrt{\frac{1}{6}}\arctan(u) + C = \frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right) + C.$$

(c) *On pose $u = e^x$, d'où $du = e^x\ dx$*

$$\int e^x\sin(e^x)\,dx = \int \sin(u)\,du = \cos(u) + C = \cos(e^x) + C.$$

(d) *On pose $x = \sin(u)$, alors $u = \arcsin(x)$ et $du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$*

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = \int x(1-x^2)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \sin(u)(1-\sin^2(u))\ du = \int \sin(u)\cos^2(u)\ du$$
$$= -\frac{\cos^3(u)}{3} + C = -\frac{(\sqrt{1-x^2})^3}{3} + C$$

(e) *On pose $u = \sin^2(x)$, alors $du = 2\cos(x)\sin(x)dx = \sin(2x)dx$*

$$\int \sin(2x)e^{\sin^2(x)}\,dx = \int e^u\ du = e^u + C = e^{\sin^2(x)} + C.$$

Exercice 2 Solution:

1. $\displaystyle\int_{-1}^{0} x^3 + 2x - 1\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + x^2 - x\right]_{-1}^{0} = 0 - (\frac{1}{4} + 1 + 1) = -\frac{9}{4}.$

2. $\displaystyle\int_0^2 e^x\,dx = [e^x]_0^2 = e^2 - 1.$

3. $\displaystyle\int_{-2}^{1} x(2x^2+1)\,dx = \int_{-2}^{1} 2x^3 + x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - (8+2) = -9.$

4. $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^{2x+1}\,dx = e\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^{2x}\,dx = e\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{\ln 2}^{\ln 3} = \frac{e}{2}(e^{2\ln 3} - e^{2\ln 2}) = \frac{e}{2}(3^2 - 2^2) = \frac{5e}{2}.$

5. *La primitive de $\sqrt{x+3} = (x+3)^{\frac{1}{2}}$ est $\dfrac{2}{3}(x+3)^{\frac{3}{2}}$. On calcule alors*

$$\int_{-2}^{1}\sqrt{x+3}\,dx = \left[\frac{2}{3}(x+3)^{\frac{3}{2}}\right]_{-2}^{1} = \frac{2}{3}(4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}) = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3}.$$

6. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 4x\,dx = \left[-\frac{1}{4}\cos 4x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{4}(\cos\frac{4\pi}{3} - \cos\pi) = -\frac{1}{4}(-\frac{1}{2} + 1) = -\frac{1}{8}.$

7. *La primitive de $\dfrac{1}{(2x+1)^2}$ est $\dfrac{1}{2}\dfrac{-1}{2x+1}$. On calcule alors* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(2x+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{2x+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(\frac{-1}{3} - (-1)) = \frac{1}{3}$

8. *La primitive de xe^{-x^2} est $-\dfrac{1}{2}e^{-x^2}$. On calcule alors* $\displaystyle\int_0^2 xe^{-x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^2 = -\frac{1}{2}(e^{-4} - 1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-4}$

Exercice 3 (Applications) .

1) **Solution:**

On a $ax+b+\dfrac{c}{x-1}=\dfrac{(ax+b)(x-1)+c}{x-1}=\dfrac{ax^2+(b-a)x+(c-b)}{x-1}$

d'où $\dfrac{x^2+1}{x-1}=\dfrac{ax^2+(b-a)x+(c-b)}{x-1}$*; ce qui entraîne* $a=1$*,* $b=a=1$ *et* $c=1+b=2$*;*

ainsi $\dfrac{x^2+1}{x-1}=x+1+\dfrac{2}{x-1}$*. Une primitive de* $\dfrac{x^2+1}{x-1}$ *sur les intervalles* $]-\infty,1[$ *et* $]1,+\infty[$*, est obtenue par*

$\displaystyle\int_2^3 \frac{x^2+1}{x-1}\,dx=\int x+1+\frac{2}{x-1}\,dx=\frac{x^2}{2}+x+2\ln(|x-1|)=\frac{x^2}{2}+x+\ln((x-1)^2).$

D'où $I=\displaystyle\int_2^3\frac{x^2+1}{x-1}\,dx=\left[\frac{x^2}{2}+x+\ln((x-1)^2)\right]_2^3=\frac{9}{2}+3+\ln(2^2)-(\frac{4}{2}+2+\ln(1^2))=\frac{15}{2}+\ln(4)-4=\frac{7}{2}+\ln(4).$

2) On a $\displaystyle\int A\exp(-\theta t)-B\exp(-\lambda t)\ dt=A\frac{\exp(-\theta t)}{-\theta}-B\frac{\exp(-\lambda t)}{-\lambda}=\frac{B}{\lambda}\exp(\lambda t)-\frac{A}{\theta}\exp(-\theta t).$

La quantité totale de substance au temps $t\geq 0$ *est donc* $\dfrac{B}{\lambda}\exp(\lambda t)-\dfrac{A}{\theta}\exp(-\theta t)+C$ *où* C *est une constante à déterminer.*

On sait qu'au temps $t=0$*, il n'y a pas desubstance dans le sang, c-à-d* $\dfrac{B}{\lambda}\exp(0)-\dfrac{A}{\theta}\exp(0)+C=0$*, d'où* $C=\dfrac{A}{\theta}-\dfrac{B}{\lambda}$*. La quantité totale de substance au temps* $T\geq 0$ *est alors égale à*

$\dfrac{B}{\lambda}\exp(\lambda T)-\dfrac{A}{\theta}\exp(-\theta T)+\dfrac{A}{\theta}-\dfrac{B}{\lambda}=\dfrac{B}{\lambda}(\exp(\lambda T)-1)+(\dfrac{A}{\theta}(1-\exp(-\theta T)).$

3) On a $\displaystyle\int 200+50t\ dt=200t+\frac{50}{2}t^2=200t+25t^2.$

Ainsi la population a augmenté entre la quatrième et la dixième année de $\displaystyle\int_4^{10}200+50t\ dt=\left[200t+25t^2\right]_4^{10}=$ $200(10-4)+25(100-16)=1200+2100=3300$ *individus.*

4) On a $\displaystyle\int 450,268\ e^{1,12567t}\ dt=\frac{450,268}{1,12567}\ e^{1,12567t}$*. On note par* $N(t)$ *l'effectif au temps* t*.*

Alors, l'effectif de cette population après trois heures est égale à $N(3)=(N(3)-N(0))+N(0)=\displaystyle\int_0^3 450,268\ e^{1,12567t}\ dt+$ $400=\left[\dfrac{450,268}{1,12567}\ e^{1,12567t}\right]_0^3+400=\dfrac{450,268}{1,12567}(e^{1,12567\times 3}-1)+400=400(e^{3,37701}-1)+400=400e^{3,37701}\sim 11713$