Université de Rennes
Département de Mathématiques Année 2015-2016

1ère année de licence de biologie
“Analyse"

Feuille d'exercices n^{o}2. Calcul d'incertitudes.

Exercice 1 *La température, la pression et le volume d'un gaz parfait sont liés par une relation du type*

$$P = k\frac{T}{V}$$

où k est une constante positive.

Solution:

(a) $\ln(P) = \ln(k\frac{T}{V}) = \ln(k) + \ln(T) - \ln(V)$

(b) k étant constant on a $\triangle k = 0$ et $\frac{\triangle P}{P} = \frac{\triangle T}{T} + \frac{\triangle V}{V}$.

(c) $\frac{\triangle P}{P} = \frac{\triangle T}{T} + \frac{\triangle V}{V} \leq 0,005 + 0,002 = 0,007 = 0,7\%$.

Exercice 2 *Si on lance depuis le sol un objet avec une vitesse v_0 et sous un angle α par rapport à l'horizontale, la hauteur maximale atteinte par l'objet est donnée par la formule :*

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g}$$

Les mesures sur la vitesse et l'angle donnent $v_0 = 3 \pm 1\, m/s$ et $\alpha = 1 \pm 0,05\, rad$.

On a $g = 9,80\, m/s^2$ (l'accélération gravitationnelle).

Solution:

(a) En utilisant la formule $\triangle f = |f'(x)|\triangle x$ et donc $\frac{\triangle f}{|f(x)|} = |f'(x)|\frac{\triangle f}{|f(x)|}$, on a

$$\frac{\triangle h}{h} = \frac{\triangle(v_0^2)}{v_0^2} + \frac{\triangle(\sin^2(\alpha))}{\sin^2(\alpha)} = \frac{2v_0\triangle v_0}{v_0^2} + \frac{2\cos(\alpha)\sin(\alpha)\triangle(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} = \frac{2\triangle v_0}{v_0} + \frac{2|\cos(\alpha)|\triangle(\alpha)}{\sin(\alpha)} = 2\frac{\triangle v_0}{v_0} + 2\frac{\triangle(\alpha)}{\tan(\alpha)}.$$

(b) Ainsi $\frac{\triangle h}{h} = 2\frac{\triangle v_0}{v_0} + 2\frac{\triangle(\alpha)}{\tan(\alpha)} = 2\frac{1}{3} + 2\frac{0,05}{\tan(1)} = \frac{2}{3} + \frac{0,1}{\tan(1)} = \frac{2}{3} + \frac{0,1}{1,55} = 0,73 = 73\%$.

Par suite $\triangle h = h\frac{\triangle h}{h} = \frac{v_0^2\sin^2(\alpha)}{2g}\frac{\triangle h}{h} = \frac{3^2\sin^2(1)}{2\times 9,8} \times 0,73\ m = 0,32 \times 0,73\ m = 0,23\ m$.

Exercice 3 *La mesure du rayon d'un disque donne $r = 5 \pm 0.4$ cm. Calculer la surface S du disque, ainsi que les incertitudes de la mesure (absolue et relative).*

Solution:

La surface du disque est $S = \pi r^2 = 25\pi\ cm^2$.

On a $\frac{\triangle S}{S} = 2\frac{\triangle r}{r} = 2\frac{0,4}{5} = \frac{0,8}{5} = 0,16 = 16\%$ *par suite* $\triangle S = S\frac{\triangle S}{S} = 25\pi \times 0,16\ cm^2 = 4\pi\ cm^2$.

Exercice 4 *Un sac contient 2.1 kg ± 50 g de bonbons. Pour estimer le nombre de bonbons présents dans le sac, on pèse un bonbon au hasard et on obtient 15 ± 3 g . On suppose que tous les bonbons sont identiques. Calculer le nombre total de bonbons avec les incertitudes absolue et relative.*

Solution:

On note par N le nombre de bonbons, $T = 2100\pm 50$ g le poids de tous les bonbons i.e. et $B = 15\pm 3$ g le poids d'un bonbon. Alors $N = \frac{T}{B} = \frac{2100}{15} = 140$ *bonbons, par suite* $\frac{\triangle N}{N} = \frac{\triangle T}{T} + \frac{\triangle B}{B} = \frac{50}{2100} + \frac{3}{15} = 0,02 + 0,2 = 0,22 = 22\%$ *et* $\triangle N = N\frac{\triangle N}{N} = 140 \times 0,22 = 30,8$ *Donc $N = 140 \pm 31$ bonbons.*

Exercice 5 *L'indice d'un milieu transparent à la lumière est $n(i,r) = \frac{\sin(i)}{\sin(r)}$. Calculer l'incertitude relative commise sur n en fonction de i, r et des incertitudes des mesures sur r et sur i pour $i = 59$ degrés, $r = 25$ degrés avec des incertitudes de mesure de 1 minutes d'angle.*

Solution:

On a $\frac{\triangle n}{n} = \frac{\triangle(\sin(i))}{\sin(i)} + \frac{\triangle(\sin(r))}{\sin(r)} = \frac{\cos(i)\triangle i}{\sin(i)} + \frac{\cos(r)\triangle r}{\sin(r)} = \frac{\triangle i}{\tan(i)} + \frac{\triangle r}{\tan(r)}$.

On convertit les minutes en degré, on a $1' = 0,016°$ alors

$\frac{\triangle n}{n} = \frac{\triangle i}{\tan(i)} + \frac{\triangle r}{\tan(r)} = \frac{0,016}{\tan(59°)} + \frac{0,016}{\tan(25°)} = \frac{0,016}{1,66} + \frac{0,016}{0,46} = 0,043 = 4,3\%$.