Université de Rennes
Département de Mathématiques Année 2015-2016

1ère année de licence de biologie
"Analyse"
Feuille d'exercices n^{o}1. Etude de fonctions.

Domaine d'étude

1) Donner le domaine de définition des fonctions suivantes et éventuellement réduire le domaine d'étude :

(a) Comme $x^2+12 \geq 12 > 0$, $\sqrt{x^2+12}$ est définie et ne s'annule pas, d'où f est définie sur $\mathbb{R}$ c-à-d que $D_f = \mathbb{R}$.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \frac{(-x)^3}{\sqrt{(-x)^2+12}} = -\frac{x^3}{\sqrt{x^2+12}} = -f(x)$, f est donc impaire, on peut alors réduire le domaine d'étude à $D = [0, +\infty[$.

(b) $D_f = \mathbb{R}$ car le domaine de définition des fonctions sinus et cosinus est $\mathbb{R}$.

Comme les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π, on a $f(x+2\pi) = \cos(x+2\pi)\sin(x+2\pi)^2 = \cos(x)\sin(x)^2 = f(x)$, donc f est périodique de période 2π, on peut dans un premier temps réduire le domaine d'étude à $[-\pi, \pi]$.

D'autre part, $f(-x) = \cos(-x)\sin(-x)^2 = \cos(x)(-\sin(x))^2 = \cos(x)\sin(x)^2 = f(x)$, donc f est paire, on peut donc dans un second temps réduire le domaine d'étude à $[0, \pi]$.

On remarque enfin, que la restriction de f à $[0, \pi]$, à $(\frac{\pi}{2}, 0)$ comme centre de symétrie, car
$f(\frac{\pi}{2}-x)+f(\frac{\pi}{2}+x) = \cos(\frac{\pi}{2}-x)\sin(\frac{\pi}{2}-x)^2 + \cos(\frac{\pi}{2}+x)\sin(\frac{\pi}{2}+x)^2 = \sin(x)\cos(x)^2 - \sin(x)\cos(x)^2 = 0 = 2.0$
On peut finalement réduire le domaine d'étude à $D = [0, \frac{\pi}{2}]$.

(c) $D_f = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 1+x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq -1\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$.

On va montrer que le point $(-1, -1)$ est centre de symétrie, pour tout $x \in D_f$ on a:
$$f(-1-x)+f(-1+x) = \frac{1-(-1-x)}{1+(-1-x)} + \frac{1-(-1+x)}{1+(-1+x)} = \frac{2+x}{-x} + \frac{2-x}{x} = \frac{-2-x}{x} + \frac{2-x}{x} = \frac{-2x}{x} = -2 = 2(-1).$$
On peut donc réduire le domaine d'étude à $D =]-1, +\infty[$.

(d) $f(x) = \sqrt{2-\sqrt{x}}$ est définie $\Longleftrightarrow 2-\sqrt{x} \geq 0$ et $x \geq 0 \Longleftrightarrow 4 \geq x$ et $x \geq 0 \Longleftrightarrow 4 \geq x \geq 0$,
d'où $D_f = [0, 4]$.

Dérivées, sens de variation

2) Calculer les dérivées des fonctions suivantes

a) $f'(x) = ((x+1)^2 e^x)' = 2(x+1)e^x + (x+1)^2 e^x = (x+1)(x+3)e^x$

b) $f'(x) = (\cos(ax+b))' = -a\sin(ax+b)$

c) $f'(x) = (\ln(\sqrt{x^2+1}))' = (\frac{1}{2}\ln(x^2+1))' = \frac{1}{2}(\ln(x^2+1))' = \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1}$

d) $f'(x) = (\text{Arctan}(\ln(x)))' = \frac{(\ln(x))'}{1+\ln(x)^2} = \frac{\frac{1}{x}}{1+\ln(x)^2} = \frac{1}{x(1+\ln(x)^2)}$

$$g'(x) = (\text{Arccos}(\sin(x)))' = -\frac{(\sin(x))'}{\sqrt{1-\sin(x)^2}} = -\frac{\cos(x)}{\sqrt{\cos(x)^2}} = -\frac{\cos(x)}{|\cos(x)|} = \begin{cases} -1 & \text{si } \cos(x) > 0 \\ 1 & \text{si } \cos(x) < 0 \end{cases}$$

3) On note f l'application polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3 - 3x - 1$. On a $f'(x) = (4x^3 - 3x - 1)' = 12x^2 - 3$
$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 12x^2 - 3 = 0 \Longleftrightarrow 12x^2 = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \Longleftrightarrow x = \frac{1}{2}$ ou $x = -\frac{1}{2}$. On a $f(\frac{1}{2}) = -2$ et $f(-\frac{1}{2}) = 0$.
Le calcul des limites donne $\lim\limits_{x\to+\infty} 4x^3 - 3x - 1 = \lim\limits_{x\to+\infty} 4x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 4x^3 - 3x - 1 = \lim\limits_{x\to-\infty} 4x^3 = -\infty$.
D'où le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗	0	↘		↗	$+\infty$
	$-\infty$				-2		

4) Une population de bactéries a la taille $f(t) = Ae^{t/\tau}$ où A et τ sont des constantes.
Son taux de croissance au temps $t = \tau$ est $f'(\tau) = \frac{A}{\tau}e^{\tau/\tau} = \frac{Ae}{\tau}$.

Limites et asymptotes

4) Calculer, si elles existent, les limites suivantes:

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x^2+2x+1 = \lim\limits_{x\to+\infty} -2x^2 = -\infty$;

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x+1}{3x^2+x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x}{3x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{3x} = 0$;

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\sqrt{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x(1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}) = +\infty$;

(d) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{1}{x-1}(\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{2}{3x+5}) = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{1}{x-1}\dfrac{3x+5-2(x+3)}{(x+3)(3x+5)} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{1}{x-1}\dfrac{x-1}{(x+3)(3x+5)}$
$= \lim\limits_{x\to1} \dfrac{1}{(x+3)(3x+5)} = \dfrac{1}{32}$

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3})(\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3})}{(\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3})} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x+5)-(x-3)}{(\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3})}$
$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{8}{(\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3})} = 0$

(f) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}-1} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{x(\sqrt{1+x^2}+1)}{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{x(\sqrt{1+x^2}+1)}{(1+x^2-1)} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{x(\sqrt{1+x^2}+1)}{x^2} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{(\sqrt{1+x^2}+1)}{x}$.
Il nous reste maintenant à considérer les limites à droite et à gauche de 0:
$\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}-1} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{(\sqrt{1+x^2}+1)}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}-1} = \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{(\sqrt{1+x^2}+1)}{x} = -\infty$

5) Einstein a montré que la masse d'un corps est fonction de sa vitesse; si c est la vitesse de la lumière ($c = 300000\ km\ s^{-1}$) et v est la vitesse du corps, la masse de ce corps est $m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ où v est exprimé en $km.s^{-1}$ et $0 \le v < c$ et m_0 une constante > 0.

(a) Pour $v = 0$ on a $m_0 = m(0)$ c'est donc la masse du corps au repos .

(b) $\lim\limits_{v\to c^-} m(v) = \lim\limits_{v\to c^-} \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = +\infty$.

Etude de fonctions, applications diverses

7) Etudier la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3+3x^2-3}{x^2-1}$ et représenter son graphe dans un repère orthonormé.

i) Domaine de définition de f: , $D_f = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2-1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$

ii) Sens de variation: $f'(x) = \dfrac{(3x^2+6x)(x^2-1)-2x(x^3+3x^2-3)}{(x^2-1)^2} = \dfrac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2} = \dfrac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$.

$f'(x) = 0 \iff x^2(x^2-3) = 0 \iff x = 0$ ou $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$.
tableau des signes de f'

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x^2-3		+	0				−				0	+	
x^2				+			0		+				
$(x^2-1)^2$			+		0		+		0	+			
f'		+	0	−	||	−	0	−	||	−	0	+	

iii) Limites aux bornes de D_f:

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+3x^2-3}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty.$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+3x^2-3}{x^2-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}x=-\infty.$

b) $\displaystyle\lim_{x\to1^-}\frac{x^3+3x^2-3}{x^2-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^3+3x^2-3}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^3+3x^2-3}{(x+1)}\frac{1}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}=-\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to1^+}\frac{x^3+3x^2-3}{x^2-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^3+3x^2-3}{(x+1)}\frac{1}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}=+\infty$

c) $\displaystyle\lim_{x\to-1^-}\frac{x^3+3x^2-3}{x^2-1}=\lim_{x\to-1^-}\frac{x^3+3x^2-3}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to-1^-}\frac{x^3+3x^2-3}{(x-1)}\frac{1}{x+1}=\lim_{x\to-1^-}\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}=-\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to-1^+}\frac{x^3+3x^2-3}{x^2-1}=\lim_{x\to-1^+}\frac{x^3+3x^2-3}{(x-1)}\frac{1}{x+1}=\lim_{x\to-1^+}\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}=+\infty$

iv) Tableau de variation de f

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{-3\sqrt{3}+6}{2}$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	3	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$\frac{3\sqrt{3}+6}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

v) Directions asymptotiques:

La représentation graphique de f admet des asymptotes verticales d'équations $x=1$ et $x=-1$.

On va maintenant déterminer si elle admet des asymptotes oblique en $+\infty$ et $-\infty$.

On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+3x^2-3}{x(x^2-1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}1=1.$

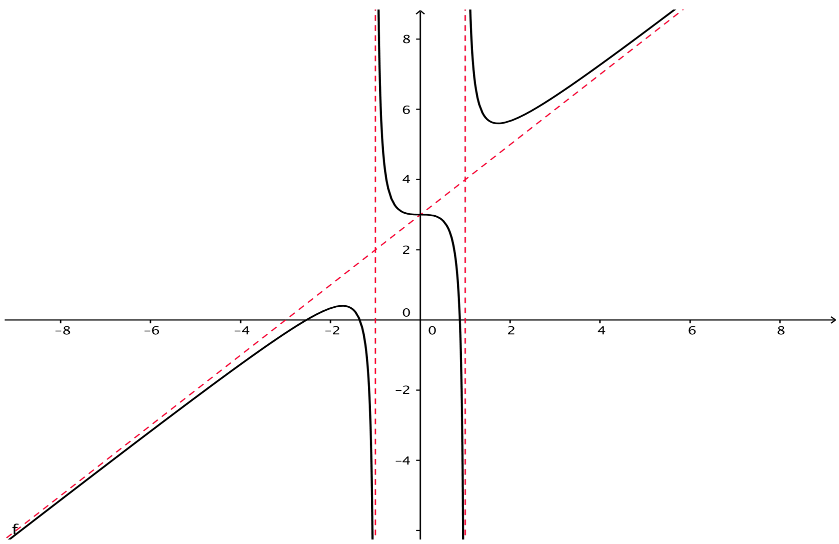
et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+3x^2-3}{x^2-1}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+3x^2-3-x(x^2-1)}{x^2-1}$

$\displaystyle=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+3x^2-3-x^3+x}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-3+x}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}3=3.$

Le même calcul donne $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)-x=3.$

Ainsi, la droite $y=x+3$ est une asymptote oblique à la représentation graphique de f en $+\infty$ et $-\infty$.

vi) Esquisse du graphe de f :



8) Tout échantillon radioactif se désintègre spontanément de telle sorte que le nombre de noyaux radioactifs présents dans l'échantillon décroît en fonction du temps selon la loi

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

où N_0 est le nombre de noyaux à $t = 0$ et λ une constante caractéristique de l'échantillon.

(a) Le temps T nécessaire à la désintégration de la moitié des noyaux (appelé période doit vérifier $N_0 e^{-\lambda T} = \frac{N_0}{2} \Longleftrightarrow e^{-\lambda T} = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \ln(e^{-\lambda T}) = \ln(\frac{1}{2}) \Longleftrightarrow -\lambda T = -\ln(2) \Longleftrightarrow T = \frac{\ln(2)}{\lambda}$.
D'où $\lambda = \frac{\ln(2)}{T}$, ainsi $N(t) = N_0 e^{-\lambda t} = N = N_0 e^{-\frac{\ln(2)}{T} t} = N_0 e^{\ln(2)\frac{-t}{T}} = N_0 \left(e^{\ln(2)}\right)^{\frac{-t}{T}} = N_0 2^{-\frac{t}{T}}$.

(b) Le Polonium 210 a une période $T = 138$ jours. Evaluer le pourcentage de noyaux radioactifs encore présents au bout d'un an. Il s'agit d'évaluer $\frac{N(365)}{N_0} = 2^{-\frac{365}{138}} \simeq 0,16 = 16\%$.

9) On injecte un médicament par voie intraveineuse à un malade (ici une dose de 200 ml). Un dosage de concentration est effectué à divers instants (l'instant $t = 0$ correspond à la fin de l'injection). On désigne par $C(t)$ la concentration du médicament dans le sang à l'instant t. Après l'injection, la concentration suit les valeurs données dans le tableau ci-dessous (t en heures et C en mg/ml) :

t	0	1	2	4	6	8	12	16	20	24
$C(t)$	11.0	10.2	9.5	8.2	7.0	6.1	4.5	3.4	2.5	1.8

On montre que la concentration C suit une loi exponentielle:

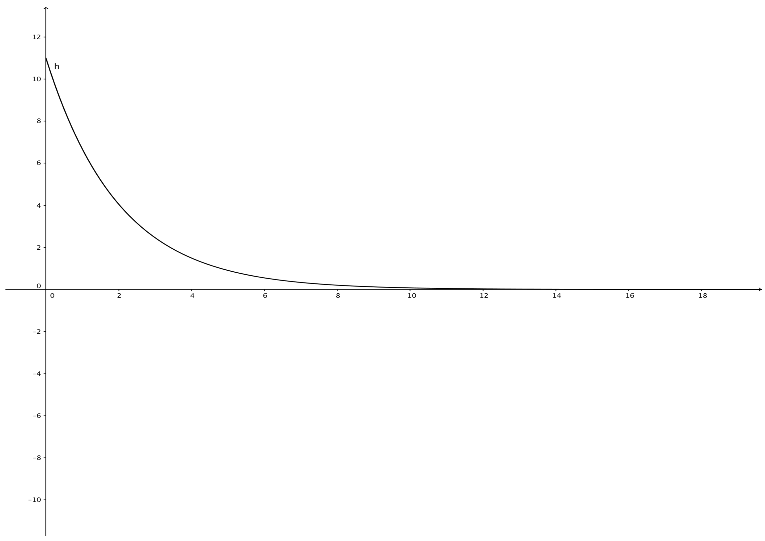
$$C(t) = f(t) \text{ où } f(t) = Qe^{-\gamma t}$$

où γ vaut 75.10^{-3}.

(a) $Q = f(0) = 11$, d'où $f(t) = 11e^{-\gamma t}$

(b) $f'(t) = -11\gamma e^{-\gamma t}$, est < 0 , donc f est strictement décroissante, qui est bien en accord avec les données du tableau.

(c) $\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty} 11e^{-\gamma t} = 0$.



(d)

(e) On note T l'intervalle de temps nécessaire pour que la concentration baisse jusqu'au tiers de sa valeur à l'instant t,
$C(t+T) = C(t)/3 \Longleftrightarrow 11e^{-\gamma(t+T)} = \frac{11e^{-\gamma t}}{3} \Longleftrightarrow e^{-\gamma(t+T)} = \frac{e^{-\gamma t}}{3} \Longleftrightarrow e^{-\gamma t}e^{-\gamma T} = \frac{1}{3}e^{-\gamma t} \Longleftrightarrow e^{-\gamma T} = \frac{1}{3}$
D'où $-\gamma T = \ln(\frac{1}{3}) = -\ln(3)$, par suite $T = \frac{\ln(3)}{\gamma}$, ne dépend que de γ.