RÉSUMÉ : RÉSOLUTION EQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE DU 1ER ORDRE

$$(E): y' = a(x)y + b(x)$$

solution générale= solution de l'équation homogène + solution particulière

1. On cherche d'abord les solutions y_h de l'équation homogène (sans second membre) $(E_1): y' = a(x)y$
   - Elles sont de la forme $y_h(x) = Ce^{A(x)}$
   - où $A(x) = \int e^{a(x)}\, dx$ et C une costante réelle.
2. On recherche ensuite les solutions de (E)
   - Pour cela on doit trouver une solution particulière y_p
   - la méthode de la variation de la constante, donne : $y_p = \left(\int b(x)e^{-A(x)} dx\right) e^{A(x)}$
3. Les solutions de $(E): y' = a(x)y + b(x)$ sont alors :
   - $y = y_h + y_p = \boxed{\left(\int b(x)e^{-A(x)} dx + C\right) e^{A(x)}}$

Une équation différentielle linéaires d'ordre 2 à coefficients constants est une équation de la forme

$$(E):\ ay''(x)+by'(x)+cy(x)=f(x)$$

où $a,\ b$ et c sont des coefficients constants (des réels) avec $a\neq 0$ et f est une fonction
(on ne considérera que des fonctions f particulières).

L'EXEMPLE DU RESSORT

- Considérons le mouvement d'un objet de masse m suspendu au bout d'un ressort vertical.
- D'après la loi de Hooke, le ressort étiré (ou comprimé) de x unités par rapport à sa longueur initiale exerce une force proportionnelle à x :
- la force de rappel égale à $-kx$, où k est une constante positive (appelée la constante du ressort).
- En faisant abstraction de toute autre force extérieure (telle que la force de résistance due à l'air), on a, conformément à la deuxième loi de Newton (la force est égale à la masse fois l'accélération) :
- $$mx''(t) = -kx(t)$$
- Si de plus, on tient compte du poids, l'équation devient :

$$mx''(t) + kx(t) = mg$$

L'exemple de la Modélisation d'une articulation

- Une articulation est modélisée par un système comprenant un piston amortisseur (le cartilage...) et un ressort (le muscle).
- L'équation différentielle à laquelle obéit le déplacement x de la masse m soutenue par l'articulation s'écrit :

$$mx'' + fx' + kx = F(t)$$

- où k est la raideur du système tandon-muscle, f un coefficient positif relié à l'amortissement donné par le cartilage et $F(t)$ une force extérieure appliquée à l'articulation.

ÉQUATIONS LINÉAIRES D'ORDRE 2 À COEFFICIENTS CONSTANTS

- Soit l'équation différentielle linéaire à coefficients constants du second ordre

$$(E): \; ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$$

- où a, b et c sont des coefficients constants (des réels) avec a non nul et où f est une fonction (on ne considérera que des fonctions particulières).
- L'équation homogène associée est

$$(E_1): \; ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

THÉORÈME

Toute solution de (E) est la somme de la solution générale y_h de (E_1) et d'une solution particulière y_p de (E) i.e. $y = y_h + y_p$

-
- Pour résoudre (E) on procède en deux étapes :
  1) Résolution de (E_1)
  2) Trouver une solution particulière de (E)

- **Résolution complète de l'équation homogène associée** (E_1)

$$(E_1):\ ay''(x)+by'(x)+cy(x)=0$$

- Son équation caractérisrique associée est $ar^2+br+c=0$.
- On commence par calculer son discriminant $\Delta=b^2-4ac$,
- le tableau ci-dessous donne les solutions générales de (E_1), suivant le signe de Δ

Résolution de l'équation homogène

$$(E_1): \ ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

$\Delta = b^2 - 4ac$	Racines de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$	Solution générale de (E_1)
$\Delta = 0$	une racine réelle double $r = \frac{-b}{2a}$	$y_h = e^{rx}(Ax + B)$ où A et B sont des réels arbitraires
$\Delta > 0$	deux racines réelles distinctent $r_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	$y_h = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$ où A et B sont des réels arbitraires
$\Delta < 0$	deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ avec $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et $\beta = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$	$y_h = e^{\alpha t}(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x))$ où A et B sont des réels arbitraires

EXEMPLE D'INTÉGRATION PAR PARTIES SUCCESSIVES

1. Soit à calculer $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = 0$
   - Le discriminant $\Delta = 16 - 16 = 0$; donc l'équation caractéristique $r^2 - 4r + 4 = 0$, à une racine double, $r = 2$.
   - D'où la solution générale est $y_h = e^{2x}(Ax + B)$, où A et B sont des réels arbitraires.
2. Soit à calculer $y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 0$
   - Le discriminant $\Delta = 9 - 8 = 1$; donc l'équation caractéristique $r^2 + 3r + 2 = 0$, à deux racines réelles , $r_1 = -2$ et $r_2 = -1$.
   - D'où la solution générale est $y_h = Ae^{-2x} + Be^{-x}$, où A et B sont des réels arbitraires.
3. Soit à calculer $y''(x) - 2y'(x) + 5y(x) = 0$
   - Le discriminant $\Delta = -16$; donc l'équation caractéristique $r^2 - 2r + 5 = 0$, à deux racines complexes conjugées , $r_1 = 1 + 2i$ et $r_2 = 1 - 2i$.
   - D'où la solution générale est $y_h = e^x(A\cos(2x) + B\sin(2x))$, où A et B sont des réels arbitraires.

On va maintenant traiter des cas particulier de l'équation avec second membre.

- Si le second membre $f(x) = P(x)$ où P est un polynôme de degré d.
- On cherche une solution particulière y_p sous la forme d'une fonction polynomiale $Q(x)$:
  I) si $c \neq 0$: $Q(x)$ polynôme de degré d.
  II) si $c = 0$ et $b \neq 0$: $Q(x) = xQ_1(x)$, avec $Q_1(x)$ polynôme de degré d.
  III) si $c = b = 0$: $Q(x) = x^2 Q_1(x)$, avec $Q_1(x)$ polynôme de degré d.

EXEMPLE

Soit à résoudre $y''(x)-4y'(x)+4y(x)=4x^2+2$.

- On a déjà montrer que la solution générale de l'équation homogène associée $y''(x)-4y'(x)+4y(x)=0$, est de la forme $y_h=e^{2x}(Ax+B)$.
- Comme le second membre $f(x)=4x^2+2$ est un polynôme de degré 2 et que $c=4\neq 0$, on peut chercher une solution particulière de la forme fonction polynomiale de degré 2, $y_p=\alpha x^2+\beta x+\gamma$.
- On a $y_p'=2\alpha x+\beta \to y_p''=2\alpha$ et en substituant dans l'équation on aura
- $(4\alpha)x^2+(-8\alpha+4\beta)x+(2\alpha-4\beta+4\gamma)=4x^2+2$, ce qui revient à résoudre le système : $\begin{cases} 4\alpha=4 \Longrightarrow \alpha=1 \\ -8\alpha+4\beta=0 \Longrightarrow \beta=\frac{8\alpha}{4}=\frac{8}{4}=2 \\ 2\alpha-4\beta+4\gamma=2 \Longrightarrow \gamma=\frac{2-2\alpha+4\beta}{4}=\frac{2-2+8}{4}=2 \end{cases}$
- D'où $y_p=x^2+2x+2$.
- Ainsi la solution générale est $\boxed{y(x)=e^{2x}(Ax+B)+x^2+2x+2}$, où A et B sont des réels arbitraires.

SECOND MEMBRE PRODUIT POLYNÔME ET EXPONENTIELLE

- Si le second membre du type $f(x) = e^{\alpha x}P(x)$ où P est un polynôme de degré d.
- On cherche une solution particulière y_p sous la forme d'une $e^{\alpha x}Q(x)$ où $Q(x)$ est un polynôme :
  A) $Q(x)$ de degré d si α n'est pas racine de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$.
  B) $Q(x) = xQ_1(x)$, avec $Q_1(x)$ polynôme de degré d, si α est racine simple de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$.
  C) $Q(x) = x^2Q_1(x)$, avec $Q_1(x)$ polynôme de degré d, si α est racine double de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$.
- **Remarque :** On pose $y(x) = e^{\alpha x}u(x)$, alors l'équation vérifiée par u est du type $a'u'' + b'u' + c'u = P(x)$, on se ramène ainsi au cas précédent i.e à la recherche d'une solution particulière sous forme de polynôme.

Exemple

Trouver la solution de $y'' - 6y' + 9y = e^{3t}$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

- L'équation homogène associée est $y'' - 6y' + 9y = 0$, donc l'équation caractéristique est $r^2 - 6r + 9 = 0$ de discriminant nul, qui a une racine double $r = 3$.
- ses solutions sont donc $y_h(t) = (A + Bt)e^{3t}$, $A, B \in \mathbb{R}$.
- Comme le second membre $f(x) = e^{3t}$ et que 3 est racine double de l'équation caractéristique, on cherche alors une solution particulière sous la forme $y_p(t) = \lambda t^2 e^{3t}$.
- Ainsi $y_p^{'}(t) = 3\lambda t^2 e^{3t} + 2\lambda t e^{3t} \rightarrow y_p^{''}(t) = 2\lambda e^{3t} + 12t\lambda e^{3t} + 9\lambda t^2 e^{3t}$ donc $y_p^{''} - 6y_p^{'} + 9y_p = 2\lambda e^{3t}$. On veut $y_p^{''} - 6y_p^{'} + 9y_p = e^{3t}$ donc $\lambda = \frac{1}{2}$ et une solution particulière est $y_p(t) = \frac{1}{2}t^2 e^{3t}$.
- La solution générale est $y(t) = \left(A + Bt + \frac{1}{2}t^2\right)e^{3t}$, où $A, B \in \mathbb{R}$.

CONDITIONS INITIALES

On cherche à trouver la solution qui vérifie $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

- On a $y(0) = A$ et on veut $y(0) = 1$, il faut donc que $A = 1$.
- On a $y'(t) = 3(A + Bt + \frac{1}{2}t^2)e^{3t} + (B + t)e^{3t}$ donc $y'(0) = 3A + B$ et on veut $y'(0) = 0$ donc $B = -3A = -3$.
- La solution recherchée est ainsi $\boxed{y(t) = \left(1 - 3t + \frac{1}{2}t^2\right) e^{3t}}$

1. Pour tout nombre réel θ, on note $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.
2. (**Formules d'Euler**)

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \\ \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}. \end{cases}$$

3. (**Formule de Moivre.**) Pour tout nombre réel θ et tout entier n, on a

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} = \cos n\theta \ + i\sin n\theta.$$

4. Pour tout nombre complexe $z = \alpha + i\beta$ on a

$$e^z = e^{\alpha+i\beta} = e^{\alpha}.e^{i\beta} = e^{\alpha}\left(cos(\beta) + i\sin(\beta)\right)$$