S1BMATHU : ANALYSE MATHÉMATIQUES POUR LA 1ÈRE ANNÉE DE LICENCE DE BIOLOGIE

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

25 novembre 2015

Sommaire

Modélisations

- Les Mathématiques : étudier et développer des méthodes pour la prédiction
- La Biologie : trouver des descriptions et explications des phénomènes naturels
- Modélisation : utiliser les mathématiques pour expliquer et prédire les phénomènes naturels.

UTILITÉ DES MODÈLES EN BIOLOGIE

- Les modèles sont utiles :
  - Pour tester des hypothèses sans risque (exemple : traitement médicamenteux ..)
  - Prédire des performances dans des conditions testables ou non
- Les modèles sont limités :
  - Modèle mathématique simple : est un modèle non réaliste
  - Un modèle réaliste : a souvent de trop nombreux paramètres
- Comment choisir un bon modèle ?

Modélisation de l'évolution d'une population de bactéries

- Nous reprenons ici l'exemple de l'évolution d'une population de bactéries dans un milieu de culture (voir Chapitre 1). Les scientifiques cherchent à modéliser l'évolution des bactéries au moyen d'une fonction du temps.
- Soit f une telle fonction définie de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout t associe la valeur $f(t)$ qui correspond au nombre de bactéries en millions à instant t exprimé en heures.
- Voici deux modèles :

Modèle exponentiel (du à Malthus (1798))

Modèle exponentiel

- On considère que dans les instants qui suivent l'ensemencement du milieu de culture, la vitesse d'accroissement de la population est proportionnelle au nombre de bactéries.
- Il existe donc un réel a strictement positif, dépendant des conditions expérimentales, tel que, à tout instant t, $f'(t) = af(t)$. On dit encore que f est solution de l'équation différentielle
- $$(E_1) : y'(t) = ay(t)$$
- c'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène (sans second membre).
- Cette équation, à pour solutions des fonctions exponentielles

$$y(t) = \lambda e^{at}.$$

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Modèle à population limitée (du à Verhulst (1836)).

Modèle à population limitée

- Dans ce modèle, on constate que, le milieu étant limité (en volume, en éléments nutritifs, . . .),
- le nombre de bactéries ne peut pas croître indéfiniment.
- Pour tenir compte de cette observation, on introduit un facteur limitant dans l'équation différentielle précédente, et on considère que la fonction f est solution de l'équation différentielle :
- $$(E_2) : y'(t) = ay(t)\left(1 - \frac{y(t)}{M}\right) = \underbrace{ay(t)}_{\text{croissance}} - \underbrace{\frac{a}{M}y^2(t)}_{\text{ralentissement}}$$

  où M est une constante strictement supérieure au nombre de bactéries initial N_0 et dépendant des conditions expérimentales et a le réel défini précedemment.

Modèle à population limitée (du à Verhulst (1836)).

- On montrera que f est une solution strictement positive de (E_2) si et seulement si la fonction $g = \frac{1}{f}$ est une solution strictement positive de :
- $$(E_2') : y'(t) + ay(t) = \frac{a}{M}$$

  qui est une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre.
- En effet $g' + ag = -\frac{f'}{f^2} + a\frac{1}{f} = \frac{-f' + af}{f^2} = \frac{af^2}{Mf^2} = \frac{a}{M}$.

  On montrera que la solution est $f(t) = \dfrac{M}{1 + \lambda M e^{-at}}$.

DÉFINITION

- Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction numérique et dans laquelle figurent une ou plusieurs de ses dérivées. L'ordre de dérivation le plus élevé apparaissant dans l'équation est appelé ordre de l'équation différentielle. Une équation différentielle a généralement une infinité de solutions.

DÉFINITION

- *On appelle équation différentielle une relation entre les valeurs de la variable x et les valeurs $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ d'une fonction inconnue y et de ses dérivées successives au point x.*
- *On dit que l'équation différentielle est d'ordre n si elle contient la dérivée n-ième de y, et pas celles d'ordre supérieur :*

$$(E_n) \qquad : F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \quad \text{est une équation différentielle d'ordre } n.$$

- *Une solution d'une équation différentielle est une fonction $y(x)$ dérivable jusqu'à l'ordre n (pour une équation d'ordre n) dans un intervalle I donné, et telle que pour toute valeur x de I, les valeurs de $y(x)$ et de ses dérivées vérifient l'équation.*

EXEMPLES

1. $$2y'' + xy^2 - e^x = 0$$

    - est une équation différentielle d'ordre 2.
    - En effet, on peut l'écrire $F(x, y, y', y'') = 0$ où $F(x, u, v, w) = 2w + xu^2 - e^x$, $u = y$, $v = y'$ et $w = y''$.

2. L'équation
$$y'(x) + 6y(x) = 3$$

    - est une équation différentielle du premier ordre ou d'ordre 1.
    - *Ses solutions sont les fonctions*
$$y(x) = \frac{1}{2} + \lambda e^{-6x}$$
avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
    - En effet, $y'(x) = -6\lambda e^{-6x}$, d'où $y'(x) + 6y(x) = -6\lambda e^{-6x} + 6\left(\frac{1}{2} + \lambda e^{-6x}\right) = 3$

Exemple

- L'équation
$$y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = 0$$
est une équation différentielle du deuxième ordre ou d'ordre 2.
- *Ses solutions sont les fonctions*
$$y(x) = Ae^{x} + Be^{3x}$$
avec A et B des constantes réelles.
- En effet, $y'(x) = Ae^{x} + 3Be^{3x}$ et $y''(x) = Ae^{x} + 9Be^{3x}$, d'où
$$y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = Ae^{x} + 9Be^{3x} - 4\left(Ae^{x} + 3Be^{3x}\right) + 3\left(Ae^{x} + 3Be^{3x}\right) = 0.$$

- **Résoudre (ou intégrer) l'équation différentielle** (E) : c'est trouver ses solutions :

$$(E) \quad y' = 2y \Longrightarrow y(x) = Ke^{2x} \qquad \text{avec } K \text{ constante}$$

- **Conditions initiales :** condition de la forme $y(x_0) = y_0$.
  par exemple $y(0) = 1$
- **Solution particulière qui satisfait les condition initiales :** est la solution y tel que $y(x_0) = y_0$.
  pour cet exemple si $x_0 = 0$ et $y_0 = 1$ alors $y(x) = e^{2x}$.
- **Courbe intégrale :** est la représentation graphique d'une solution

SOMMAIRE

Equations différentielles du premier ordre à variables séparables

La forme générale de ces équations est :

$$(E_1) : y' = f(x)\, g(y)$$

- $$y' = f(x)\, g(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f(x)\, g(y)$$
- qui s' écrit $\dfrac{dy}{g(y)} = f(x)dx$, ce qui revient à calculer deux primitives
- $$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

  et

  $$G(y) = F(x) + C$$
- avec $C \in \mathbb{R}$ une constante, $G(y)$ est une primitive de $\frac{1}{g(y)}$ et $F(x)$ est une primitive de $f(x)$.

Exemple

Soit à résoudre l'équation $y' = -\dfrac{x}{y}$.

- On pose, par exemple, $f(x) = -x$ et $g(y) = \dfrac{1}{y}$.
- Comme $G(y) = \displaystyle\int \frac{dy}{g(y)} = \int y\,dy = \frac{y^2}{2}$ et
  $F(x) = \displaystyle\int f(x)\,dx = -\int x\,dx = -\frac{x^2}{2}$
- on aura $\dfrac{y^2}{2} = -\dfrac{x^2}{2} + C$.
- Les solutions de l'équation (E_1) sont $y(x) = \sqrt{K - x^2}$ et $y(x) = -\sqrt{K - x^2}$ où $K = 2C$ est une constante positive $(K \geq 0)$.
  Les solutions sont définies pour $x \in [-\sqrt{K}, \sqrt{K}]$.
- Les courbes intégrales sont les cercles de centre l'origine et de rayon $\sqrt{K}$.

DÉFINITION

Une équation différentielle linéaire d'ordre 1 *est une équation de la forme*

$$\boxed{(E) : \ y' = a(x)y + b(x).}$$

- *On parle d'équation différentielle linéaire d'ordre* 1 *sans second membre si* $b = 0$.
  On dit que l'équation $\boxed{(E_1) : \ y' = a(x)y}$ *est l'équation homogène associée à* (E).
- *On parle d'équation différentielle linéaire d'ordre* 1 *avec second membre si* $b \neq 0$.
  La fonction $b(x)$ *est le second membre de l'équation* (E).

EXEMPLES

1) On considère l'équation $(E) : y'(x) = -6y(x) + 3$.
   L'équation homogène associée est $(E_1) : y'(x) = -6y(x)$.
2) On considère l'équation $(E') : y'(x) + \tan(x)y(x) = \sin(2x)$.
   L'équation homogène associée est $(E_1') : y'(x) + \tan(x)y(x) = 0$.

Théorème

Toute solution de (E) : $y' = a(x)y + b(x)$ est la somme de la solution générale y_h de (E_1) : $y' = a(x)y$ et d'une solution particulière y_p de (E) i.e.

$$y = y_h + y_p$$

-
- Pour résoudre (E) on procède en deux étapes :
  1. Résolution de (E_1)
  2. Résolution complète de (E), de deux manières possibles
     - en ajoutant à la solution générale de (E_1) une solution particulière de (E)
     - pour trouver une telle solution particulière :
       on peut, par exemple, utiliser la méthode de la variation de la constante

Résolution de l'équation homogène associée

- Nous considérons dans ce paragraphe l'équation de la forme :

$$(E_1) : y'(x) - a(x)y(x) = 0$$

- Cette équation est à variables séparables et aisément intégrables sous réserve de
pouvoir calculer la primitive de la fonction $a(x)$.
- La solution générale de (E_1) est donc

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = a(x)$$

- $\Leftrightarrow \ln(|y(x)|) = \int a(x)\, dx + C \Leftrightarrow |y(x)| = e^{\int a(x)\, dx + C}$

$$\boxed{y_h(x) = \lambda e^{\int a(x)\, dx} = \lambda e^{A(x)}}$$

où λ est une constante et $A(x)$ est une primitive de $a(x)$.

Exemple

Soit à résoudre $(E) : y'(x) = -6y(x) + 3.$

- *L'équation homogène associée est* $(E_1) : y'(x) = -6y(x)$.
- *Une primitive de* $a(x) = -6$ *est* $A(x) = -6x$,
- *d'où la solution générale de est* $y_g(x) = \lambda e^{-6x}$, *où* λ *est une constante.*

Exemple

Soit à résoudre $(E') : y'(x) + y(x)\tan(x) = \sin(2x)$

- *pour résoudre l'équation homogène associée* $(E'_1) : y'(x) + y(x)\tan(x) = 0$, *il faudrait déterminer une primitive de* $a(x) = -\tan(x)$.
- *On pose pour cela* $u(x) = \cos(x)$ *dont la différentielle est* $du = -\sin(x)\,dx$.
- *Alors* $\displaystyle\int (-\tan(x))\,dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u(x)| = \ln|\cos x|$.
- *Ainsi, la solution générale de* (E'_1) *est* $y_h(x) = \lambda e^{\ln(|\cos x|)} = \lambda|\cos(x)| = K\cos(x)$ *où* K *est une constante.*

Exemple

Soit à résoudre $y' + e^x y = 0$

- *On a* $a(x) = -e^x$ *et une primitive de* $a(x)$ *est* $A(x) = -e^x$
- *d'où* $y_h(x) = \lambda e^{-e^x}$, *où* λ *est une constante.*

RECHERCHE D'UNE SOLUTION PARTICULIÈRE

- Supposons que l'on dispose d'une solution particulière y_p de l'équation $(E):\ y' = a(x)y + b(x)$ alors la solution générale de (E) sera la fonction :

$$y(x) = \lambda e^{\int a(x)\, dx} + y_p(x).$$

EXEMPLE

On reprend les exemples précédents

- 1. *L'équation homogène associée est* $(E): y'(x) = -6y(x) + 3$, *a pour solution particulière* $y_p = \frac{1}{2}$, *ce qui se vérifie aisément, puisque* $y_p' = 0$, *on a* $0 = -6\frac{1}{2} + 3$.

     Anisi la solution générale de $(E): y'(x) = -6y(x) + 3$, *est* $y(x) = \lambda e^{-6x} + \frac{1}{2}$ *où* λ *est une constante.*

  2. *Par contre pour* $(E'): y'(x) + y(x)\tan(x) = \sin(2x)$, *Il n'est pas aisé d'obtenir rapidement une solution particulière.*

     La méthode de la variation de la constante permet d'obtenir une telle solution.

MÉTHODE DE LA VARIATION DE LA CONSTANTE.

- Soit $y_h(x) = \lambda e^{A(x)}$ la solution de l'équation (E_1) : $y' = a(x)y$.
- On se propose de chercher une solution de (E) en faisant varier la constante λ : on pose alors
- $$y(x) = \lambda(x)e^{A(x)}$$
- Après dérivation, on obtient
$$y'(x) = \lambda'(x)e^{A(x)} + a(x)\lambda(x)e^{A(x)}$$
- et on remplace y' dans (E) y' :
$$\lambda'(x)e^{A(x)} + a(x)\lambda(x)e^{A(x)} - a(x)\lambda(x)e^{A(x)} = b(x)$$
- ce qui donne $\lambda'(x) = b(x)e^{-A(x)}$ et par intégration $\lambda(x) = \displaystyle\int b(x)e^{-A(x)}dx$.
- Finalement, les solutions de générale de (E) sont

$$\boxed{y(x) = \left(\int b(x)e^{-A(x)}dx + C\right)e^{A(x)} = \left(\int b(x)e^{-\int a(x)\,dx}dx + C\right)e^{\int a(x)\,dx}}$$

EXEMPLES

EXEMPLE

- On a déja vu que l'équation homogène associée de $(E') : y'(x) + \tan(x)y(x) = \sin(2x)$ a pour solution générale $y_h(x) = \lambda \cos(x)$.
- Pour cela, il suffit de déterminer une primitive de $b(x)e^{-A(x)}$
- où $b(x) = \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ et $e^{-A(x)} = \frac{1}{e^{-A(x)}} = \frac{1}{\cos(x)}$
- On est donc ramener à calculer

$$\int b(x)e^{-A(x)} dx = \int 2\sin(x)\cos(x)\frac{1}{\cos(x)} dx = \int 2\sin(x)\, dx = -2\cos(x) + C$$

- Ainsi, la solution générale de (E'') est $y(x) = (-2\cos(x) + C)\cos(x) = -2\cos^2(x) + C.\cos(x)$.

POPULATION DE BACTÉRIES

- Pour résoudre l'équation (E_1), on procède comme suit : sur un intervalle où y ne s'annule pas

$$(E_1): \; y'(t) - ay(t) = 0 \Leftrightarrow \; y = \lambda e^{at}$$

- Pour déterminer la constante λ, on utilise la condition initiale $f(0) = N_0$, on en déduit l'expression de $f(t)$:

$$f(t) = N_0 e^{at}$$

- L'évolution d'une population de bactéries dans un milieu de culture a été mesurée expérimentalement :

temps (heures)	0	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6
nombre de bactéries (millions)	1	2	4	7,9	14,5	37,9	70,4	90,1	98

- Le nombre de bactéries est exprimé en millions d'individus, le temps t est exprimé en heures.
- En utilisant la valeur expérimentale mesurée au temps $t = 0$ et $t = 0.5$ heures, On aura $f(0) = N_0 = 1$ et $f(0,5) = e^{\frac{a}{2}} = 2$, d'où $\frac{a}{2} = \ln(2)$ c-à-d. $a = 2\ln(2) = \ln(4)$.
- Ainsi $\boxed{f(t) = e^{t\ln(4)}}$.
- On constate que le nombre de bactéries prédit par ce modèle au bout de 6 heures est très supérieur au nombre de bactéries fourni par l'expérience au bout du même temps (f(6)=4096 au lieu de 98).
- Ce modèle théorique (modèle exponentiel) ne semble pas adapté aux observations expérimentales, que pour une population jeune ou peu nombreuse.

MODÈLE À POPULATION LIMITÉE

- Il s'agit de résoudre l'équation : $(E_2) : y'(t) = ay(t)(1 - \frac{y(t)}{M})$.
- Une fonction strictement positive f est une solution de (E_2) si et seulement si la fonction $g = \frac{1}{f}$ est une solution strictement positive de $(E_2') : y'(t) + ay(t) = \frac{a}{M}$
- qui est une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre.
- En effet $g' + ag = -\frac{f'}{f^2} + a\frac{1}{f} = \frac{-f' + af}{f^2} = \frac{af^2}{Mf^2} = \frac{a}{M}$.
- On trouve en utilisant les résultats précédent que les solutions de (E_2'), sont de la forme $g(t) = \frac{1}{M} + \lambda e^{-at}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
- D'où $f(t) = \frac{1}{\frac{1}{M} + \lambda e^{-at}} = \frac{M}{1 + \lambda M e^{-at}}$ et on détermine les constantes à l'aide des conditions initiales.
- On retrouve $\boxed{f(t) = \frac{100}{1 + 99e^{-\ln(4)t}}}$, donc $a = \ln(4)$, $M = 100$ et $\lambda \simeq 1$.
- Ce modèle est plus conforme aux données expérimentales.