3.36pt

S1BMATHU : Analyse Mathématiques pour la 1ère année de licence de biologie

Primitives et intégrale

10 novembre 2015

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

- Supposons que l'on fasse une expérience dans laquelle nous étudions la taille d'une population. En un point particulier du temps t, notons $W(t)$ la taille de la population. Nous avons, voir le chapitre 1, que la dérivée de $W(t)$ par rapport à t donne une formule pour le taux de variation de la population

$$W'(t) = v(t)$$

- où v est une fonction qui représente l'évolution du taux de variation de la population en fonction du temps.

LA TAILLE D'UNE POPULATION

- Supposons maintenant que nous soyons confrontés au problème inverse, c'est à dire que l'on connaisse l'expression $v(t)$ du taux de variation de la population et que l'on ait besoin de connaitre la valeur $W(t)$ de la taille de la population en tout temps t.
- Pour calculer $W(t)$, on utilise la notion de primitive (et d'intégrale)
- $$W(t) = \int v(t)dt$$

- Si l'on connait la taille de la population à un instant précis par exemple au début de l'expérience alors au temps T la population vérifie l'identité :

$$W(T) - W(0) = \int_0^T v(t)dt$$

- Par exemple, supposons qu'une population de bactéries croisse à la vitesse de

$$10^2 e^{0,1\,t}$$

individus par heures et qu'au début de l'expérience il y ait 10^3 individus dans la population.

- Alors, une heure plus tard, la population vaut $W(1)$, et est donnée par :

$$W(1) = \int_0^1 10^2 e^{0,1\,t} dt + 10^3.$$

Respirer

- L'acte de respirer est cyclique et une respiration complète depuis le début de l'inhalation jusqu'à la fin de l'expiration, dure environ 5s. Le débit de l'air qui entre dans les poumons ne dépasse pas 0,5 L/s environ, ce qui explique en partie que la fonction f définie par
- $$f(t) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi t}{5}\right)$$
- est souvent utilisée pour modéliser le débit de l'air qui entre ou sort des poumons. Sur la base de ce modèle, le volume de l'air inhalé par les poumons au moment T est
- $$v(T) = v(T) - v(0) = \int_0^T \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi t}{5}\right) dt$$

  Cette partie du cours va nous montrer comment calculer ces valeurs.

DÉFINITION

DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Une **primitive** *de f sur I est une fonction F dérivable sur I et telle que pour tout x élément de I*

$$F'(x) = f(x)$$

-
- Notation :

$$\boxed{\int f(x)\,dx}$$

désigne une primitive de f.

EXEMPLES

1. Une primitive d'une constante $f(x) = a$ sur $I = \mathbb{R}$ est
$$F(x) = ax,$$
puisque la dérivée de F est a.
2. Une primitive de $f(x) = x^n$ sur $I = \mathbb{R}$ (avec n entier positif) est
$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1},$$
puisque la dérivée de $x^{\mathrm{n+1}}$ est $(n+1)x^n$, et pour avoir comme dérivée x^n, il suffit de diviser par $n+1$.
3. Une primitive de $f(x) = \sqrt{x}$ sur $I = [0, +\infty[$ est
$$F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}},$$
puisque la dérivée de $x^{\frac{3}{2}}$ est $\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$, il suffit ensuite de diviser par $\frac{3}{2}$.

Théorème

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.
En particulier, toute fonction dérivable sur un intervalle I admet des primitives sur I.

-

Proposition (Infinité des primitives)

Soit F une primitive de la fonction f sur I.
Alors pour toute constante C, $F + C$ est une primitive de f, et toute primitive de f s'obtient de cette manière i.e. en ajoutant à F une constante.

-
- En effet, $(F + C)' = F' + 0 = F' = f$.

Remarque

Une primitive n'est définie qu'à une constante près sur un intervalle.

-

Remarque (Unicité de la primitive, lorsqu'on impose une condition Initiale)

Parmi toutes les primitives, il n'en existe qu'une qui prend, en un point x_0 fixé, une valeur donnée y_0. En effet, si l'on impose que $F(x_0) + C = y_0$, alors $C = y_0 - F(x_0)$.

-

Exemple

La primitive de $f(x) = x^2$ et qui s'annule en $x = 2$ est

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{8}{3}.$$

Résumé

- Soit F une fonction dérivable sur un intervalle I telle que $F'(x) = f(x)$.
-

$$F \underset{\xleftarrow[\hspace{2cm}]{\text{Intégrer}}}{\xrightarrow[\hspace{2cm}]{\text{Dériver}}} f$$

- F primitive de $f \iff F' = f$
- F primitive de f, alors $F + C$ l'est aussi
- Chaque primitive de f est notée

$$\int f(x)\,dx$$

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

- "Lu à l'envers", un tableau de dérivées est un tableau de primitives.
- Le calcul d'une primitive consiste, souvent après quelques transformations que nous allons étudier au paragraphe suivant, à "reconnaître" une des fonctions du tableau :
-

Définie sur I	f	$F(x) = \int f(x)dx$
$\mathbb{R} - \{0\}$ ou $\mathbb{R}^+ - \{0\}$	x^α, $(\alpha < 0$ et $\alpha \neq -1)$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^+ - \{0\}$	x^α, $(\alpha \geq 0)$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\mathbb{R} - \{0\}$	$\dfrac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert)$
$\mathbb{R} - \{-a\}$	$\dfrac{1}{x+a}$	$\ln(\lvert x+a\rvert)$
$\mathbb{R}$	e^x	e^x
$\mathbb{R}$	e^{ax}, $(a \neq 0)$	$\dfrac{e^{ax}}{a}$

Définie sur I	f	$F(x) = \int f(x)dx$
$\mathbb{R}$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\mathbb{R}$	$\sin(ax+b),\ (a \neq 0)$	$-\dfrac{\cos(ax+b)}{a}$
$\mathbb{R}$	$\cos(ax+b),\ (a \neq 0)$	$\dfrac{\sin(ax+b)}{a}$
$\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$	$\tan(x)$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert)$
$\mathbb{R} - \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$	$\text{cotan}(x)$	$\ln(\lvert\sin(x)\rvert)$

Définie sur I	f	$F(x) = \int f(x)dx$
$\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\tan(x)$
$\mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\frac{1}{\sin^2(x)} = 1 + \text{cotan}^2(x)$	$-\text{cotan}(x)$
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1 + x^2}$	$\arctan(x)$
$]-1,1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$
$]-1,1[$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$

f	$F(x) = \int f(x)dx$
$\frac{u'}{u^m}, \; m \neq 1$	$\frac{-1}{(m-1)u^{m-1}}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln \lvert u \rvert$
$u' \cos u$	$\sin u$
$u' \sin u$	$-\cos u$

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Pour tous points a et b éléments de I on appelle intégrale de a à b d'e f la différence $F(b) - F(a)$, F étant une primitive quelconque de f sur I. Cette intégrale est notée :

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx}$$

-
- Ainsi, par définition :
  $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$,
  on écrit aussi $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.
  L' écriture $\int_a^b f(x)dx$ se lit " intégrale de a à b de $f(x)dx$".

Remarque

1. *Vérifions que dans la définition de l'intégrale ne dépend pas du choix de la primitive.* *Soit G, une autre primitive de f sur I, alors il existe une constante C telle que* $G = F + C$.

   D'où $G(b) - G(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$.
   Ainsi, la définition de l'intégrale est cohérente, c-à-d qu'elle est indépendante de la primitive choisie.

2. *Cas où une borne de l'intégrale est variable*

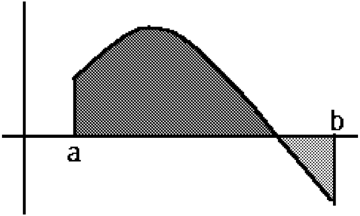
   Grâce à la définition précédente on a aussi :

   $\int_a^x f(t)dt = [F(t)]_a^x = F(x) - F(a)$.
   Dans ce cas, l'intégrale dont une borne est x*, est une primitive, en fait c'est la primitive de* f *qui s'annule en* $x = a$.

Exemple

$$\int_0^1 (t^3 + t + 1)dt = \int_0^1 t^3 dt + \int_0^1 t dt + \int_0^1 dt = \left[\frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} + t\right]_0^1 = 1/4 + 1/2 + 1 = 7/4.$$

- Géométriquement, l'intégrale de a à b de f représente l'aire A (algébrique) de l'ensemble des points situés entre la courbe de f et l'axe des abscisses dans un repère orthonormé, délimité par $x = a$ et $x = b$.
- L'aire algébrique peut être positive ou négative.
- Par définition c'est la somme des aires (géométriques) situées au dessus de l'axe des x, diminuée de celle des aires (géométriques) situées en dessous de l'axe des x.
- Exemple, lorsqu'une fonction change de signe sur $[a, b]$ avec $b > a$, l'intégrale est toujours égale à l'aire algébrique :

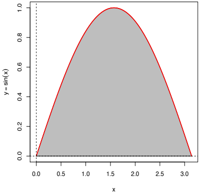
- 

- $\int_a^b f(x)dx =$ "aire au dessus de l'axe des x" - "aire en dessous de l'axe x"

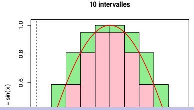
- Pour calculer l'aire, on découpe l'intervalle $[a, b]$, en n intervalles de taille constante $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, on note $f_{min,k}$ resp. $f_{max,k}$ le minimum respectivement le maximum de f sur l'intervall $[a + k\Delta x,\ a + (k+1)\Delta x]$.
- On peut alors écrire $\sum_{k=1}^{n} f_{min,k}\Delta x \leq A \leq \sum_{k=1}^{n} f_{max,k}\Delta x$
- Lorsque n tends vers $+\infty$, Δx tend vers 0 et ces sommes convergent vers

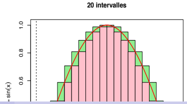
$$\int_a^b f(x)dx$$

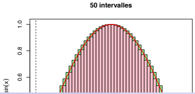
- Par exemple, pour $f(x) = \sin(x)$, $[a, b] = [0, \pi]$, et les valeurs $n = 10$, $n = 20$



et $n = 50$, on aura les découpages suivants







Valeur moyenne d'une fonction

- Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$.
- La valeur moyenne de f sur $[a, b]$ est donnée par :

$$\boxed{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}$$

Exemple

1. la fonction $\sin(x)$ sur $[0, 2\pi]$ a pour valeur moyenne

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(x)dx = \frac{1}{2\pi}\left[-\cos(x)\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(-\cos(2\pi)+\cos(0)\right) = -\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{2\pi} = 0$$

2. La fonction $f(t) = C_0 e^{-\lambda t}$ sur l'intervalle $[0, \tau]$ a pour valeur moyenne

$$\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} C_0 e^{-\lambda t}dt = \frac{C_0}{\tau}\left[\frac{-e^{-\lambda t}}{\lambda}\right]_0^{\tau} = \frac{C_0}{\lambda\tau}\left(1-e^{-\lambda\tau}\right).$$

- Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Pour tous points a, b et c de I, on a

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx}$$

- Conséquences :
- $$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$
- $$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

POSITIVITÉ DE L'INTÉGRALE ET RESPECT DES INÉGALITÉS :

- Si $f(x) \leq g(x)$ sur $[a, b]$ avec $b > a$, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

- Ainsi l'intégration respecte l'inégalité, lorsque les bornes sont dans le sens croissant.
- **Conséquences :**
- $f(\mathrm{x}) \geq 0$ sur $[a, b]$ avec $b > a$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$
- $f(\mathrm{x}) \leq 0$ sur $[a, b]$ avec $b > a$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \leq 0$

Linéarité de l'intégrale

Soient f et g des fonctions continues sur $[a,b]$, α et β des constantes, alors

$$\boxed{\int_a^b (\alpha f(x) \ + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx}$$

Exemple

$$\begin{aligned}\int_0^1 (2x^3 + 5e^x + 1)dx &= 2\int_0^1 x^3 dx + 5\int_0^1 e^x dx + \int_0^1 dx \\ &= 2\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 + 5\left[e^x\right]_0^1 + [x]_0^1 = \frac{1}{2} + 5(e-1) + 1 = -\frac{7}{2} + 5e.\end{aligned}$$