Définitions

- On fait souvent l'amalgame entre incertitudes et erreurs. Cependant, ces deux notions sont complètement indépendantes. L'utilisation erronée de ces deux termes montre que les abus de langages entretiennent le flou malgré les recommandations très précises du Bureau International des Poids et Mesures (BIPM).
- On va donner quelques définitions :
- **Une Grandeur :** est une propriété d'un corps ou d'une substance, que l'on peut exprimer quantitativement sous forme d'un nombre et d'une référence. La référence peut être une unité de mesure, une procédure de mesure, un matériau de référence, ou une de leurs combinaisons.

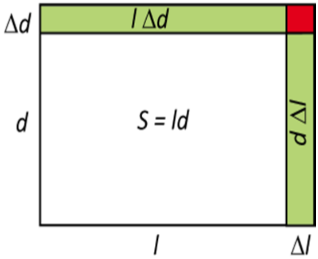
Définitions

- **Fidélité de mesure d'une grandeur :** Étroitesse de l'accord entre les indications ou les valeurs mesurées obtenues par des mesurages répétés du même objet ou d ?objets similaires dans des conditions spécifiées.
- **Erreur :** est la différence entre la valeur mesurée d'une grandeur et une valeur de référence.
- **Incertitude (de mesure) :** Paramètre non négatif qui caractérise la dispersion des valeurs attribuées à une grandeur à partir des informations utilisées.

- Dans une grande partie des Travaux Pratiques, l'objectif est de déterminer si une théorie est valide ou non, en la comparant à vos mesures expérimentales. Pour cela, il est indispensable de pouvoir estimer précisément l'incertitude (ou la barre d'erreur) de votre mesure.
- En effet, imaginons un modèle théorique prédisant le résultat $L_{th} = 12$ cm ; dans ce cas une mesure expérimentale $L_{exp} = 11 \pm 2$ cm confirme la validité de la théorie, alors que $L_{exp} = 11 \pm 0,3$ cm permet d'exclure la théorie. Ainsi Incertitude associée à une mesure expérimentale peut être aussi importante que le résultat de la mesure elle-même !
- Il est donc fondamental de savoir estimer de façon raisonnable (et honnête) l'incertitude d'une mesure.

Calcul de la surface d'un champ

- Si on veut déterminer la surface d'un champ, on mesure sa longueur l et sa larguer d, la surface S est alors $S = dl$.
- Supposons que l'on mesure cette longueur et cette largeur, au cours de cette mesure il peut y avoir des erreurs, dues à une mauvaise vue par exemple.
- Connaissant l'incertitude $\triangle l$ sur la longueur et $\triangle d$ sur la largeur, on peut se demander qu'elle est l'incertitude $\triangle S$ sur la mesure de la surface S.
- L'incertitude sur la surface correspond (voir figure) à l'accroissement total de la surface i.e.
  $\triangle S = d(l + \triangle l) + l(d + \triangle d) - dl = d\triangle l + l\triangle d + (\triangle l.\triangle d)$



- La quantité $\triangle l.\triangle d$, représentée en rouge sur la figure, est en général négligeable.
- On a ainsi incertitude de la mesure de la surface de l'ordre :

$$\triangle S \approx d\triangle l + l\triangle d.$$

- Par exemple, si l'on mesure $l = 120m$ et $d = 70m$ et si l'on suppose que l'on réalise une incertitude de $0,5$ m sur chacune des mesures,
- alors l'incertitude $\triangle S$ de la mesure de la surface est de :

$$0,5x120 + 0,5x70 = 95m^2,$$

- ce qui semble être une erreur importante, mais si on veut la comparer à la surface $S = 8400m^2$, on estime pour cela l'incertitude relative :

$$\frac{\triangle S}{S} = \frac{95}{8400} \leq 0,011304.$$

- Ainsi elle ne représente que 1% de la surface !

INCERTITUDE RELATIVE ET ABSOLUE

- On cherche à déterminer une grandeur $G = f(x,\ y,\ \ldots)$ par la mesure de $x,\ y\ldots$
- Chaque mesure est affectée d'une incertitude $\triangle x,\ \triangle y\ldots$ On veut connaitre $\triangle f$, l'erreur commise sur la détermination de f, qui résulte des incertitudes sur les mesures de $x,\ y\ldots$
- Il y a toujours une incertitude absolue liée à la mesure : $\triangle f > 0$.

DÉFINITION

- *On appelle $\triangle f$* **l'incertitude absolue** *de la mesure de f.*
- *Le résultat est souvent noté $f = f \pm \triangle f$,*
- *La* **vraie valeur** *est comprise dans l'intervalle* $[f - \triangle f, f + \triangle f]$.

DÉFINITION

- *On appelle* $\dfrac{\triangle f}{f}$ **l'incertitude relative**.
- *Elle s'exprime sans dimension, et pourra être donnée en pourcentage.*

- La grandeur G à mesurer d'une ou plusieurs autres grandeurs :

$$G = f(x) \qquad G = f(x_1, x_{2,} \dots)$$

-
  - Surface d'une plaque $G = L \times l$ (mesure de la longueur et de la largeur)
  - Surface d'un disque $G = \pi r^2$ (mesure du rayon),
  - Volume d'une boite $G = L \times l \times h$ (mesure de la longueur, la largeur et hauteur)
- On connait les incertitudes absolues $\triangle x$ ou $\triangle x_1, \triangle x_2 \dots$
- Quelle est-incertitude absolue $\triangle f$ commise sur f?

Fonction d'une variable

- La grandeur $f(x)$ dépend uniquement de la grandeur x.
- On mesure x_0 pour la grandeur x avec une incertitude absolue $\triangle x$

THÉORÈME

L'incertitude absolue $\triangle f$ est donnée par

$$\triangle f = |f'(x_0)|\triangle x$$

-

EXEMPLE

On effectue la mesure du rayon d'un disque $r = 2 \pm 0,1 m$
Quelle est l'incertitude absolue sur la surface du disque ? Quelle est l'incertitude relative ?

-
- Réponse : On a $S = f(r) = \pi r^2$
  Alors $\triangle S = |f'(2)|\triangle x = 2\pi.2.0,1 = 0,4.\pi = 1,25$m par suite l'incertitude relative sur la surface est donnée par

$$\frac{\triangle S}{S} = \frac{0,4\pi}{4\pi} = 0,1\%$$

Addition et Soustraction

Si f est une combinaison de sommes et de soustractions de fonctions :

$$f = f_1 + f_2 + \ldots + f_n - g_1 - g_2 - \ldots - g_m$$

alors l'incertitude absolue est la somme des incertitudes absolues :

$$\boxed{\triangle f = \triangle f_1 + \triangle f_2 + \ldots + \triangle f_n + \triangle g_1 + \triangle g_2 + \ldots + \triangle g_m}$$

Exemple

On suppose qu'on mesure la hauteur H d'une porte, on obtient $2,00 \pm 0,03m$.
Ce qui veut dire que $H = 2m$ et que $\triangle H = 0,03$.
La porte a une poignée qui est à une hauteur h mesurée à $0,88 \pm 0,04m$.
Alors, la distance de la poignée au sommet de la porte est $Q = H - h = 1,12m$.
Quelle est l'incertitude sur la mesure de Q?

-
- **Réponse :** D'après la formule :

$$\triangle Q = \triangle H + \triangle h = 0,03 + 0,04 = 0,07\ m$$

D'où la mesure de Q est $Q \pm \triangle Q = 1,12 \pm 0,07$m.

- Multiplications et Divisions

Si f est une combinaison de multiplications et de divisions de fonctions :

$$f = \frac{f_1 f_2 \dots f_n}{g_1 g_2 \dots g_m}$$

alors l'incertitude relative est la somme des incertitudes relatives :

$$\boxed{\frac{\triangle f}{f} = \frac{\triangle f_1}{f_1} + \frac{\triangle f_2}{f_1} + \dots + \frac{\triangle f_n}{f_n} + \frac{\triangle g_1}{g_1} + \frac{\triangle g_2}{g_2} + \dots + \frac{\triangle g_m}{g_m}}$$

EXEMPLE

Si $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ *alors* $\frac{\triangle f}{f} = \frac{\triangle g}{g} + \frac{\triangle h}{h}$ *et par suite* $\triangle f = h\triangle g + g\triangle h$.

EXEMPLE

Un oiseau a parcouru une distance d mesurée $120 \pm 3m$ en un temps t mesuré $20,0 \pm 1,2s$.
La vitesse moyenne de l'oiseau est $v = \frac{d}{t} = 6m/s$.
Quelle est l'incertitude absolue sur la mesure de v?

-

- **Réponse :** D'après la formule :

$$\frac{\triangle v}{v} = \frac{\triangle d}{d} + \frac{\triangle t}{t} = \frac{3}{120} + \frac{\triangle 1,2}{20} = 0,025 + 0,06 = 0,085 = 8,5\%.$$

Ainsi, $\triangle v = v\left(\frac{\triangle v}{v}\right) = 6$ m/s $0,085 = 0,51$m/s.
D'où la mesure de la vitesse v est $v \pm \triangle v = 6 \pm 0,51$m/s.

Cas particulier : puissance d'une fonction

Si f est une puissance entière d'une fonction g c-à-d que pour un certain entier n :

$$f(x) = \underbrace{g(x).g(x)\dots g(x)}_{n \text{ fois}} = g^n(x)$$

alors l'incertitude relative et absolue sont donnée par :

$$\boxed{\frac{\triangle f}{|f|} = |n| \frac{\triangle g}{|g|}}$$

et

$$\boxed{\triangle f = |n| |g|^{n-1} \triangle g}$$

Exemple de formule plus compliquée

EXEMPLE

Une balle de tennis est envoyée en ligne droite avec une vitesse initiale de v_0 *mesurée* $4,0 \pm 0,2 m/s$*. Après un temps t mesuré* $0,60 \pm 0,06 s$*, la hauteur de la balle est* $h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = 0,636 m$*.*
Quelle est l'incertitude absolue sur la mesure de h*?*
On supposera que $g = 9,80 \; m/s^2$ *(pas d'incertitude sur g l'accéleration gravitationnelle).*

-

- **Réponse :** On commence par poser $a = v_0 t = 2,4$m et $b = \frac{1}{2} g t^2 = 1,764$m alors $h = a - b$. D'après les règles :
- l'incertitude sur a est

$$\triangle a = |a|.\left(\frac{\triangle v_0}{v_0} + \frac{\triangle t}{t}\right) = 2,4(0,05 + 0,10) = 0,36\ m$$

- l'incertitude sur b est

$$\triangle b = |b|.2\left(\frac{\triangle t}{t}\right) = 2(1,764)(0,10) = 0,35\ m$$

- Finallement

$$\triangle h = \triangle a + \triangle b = 0,36\ m + 0,35\ m = 0,71\ m.$$

- Ainsi, la mesure de h est $h \pm \triangle h = 0,636 \pm 0,71$m.

Comparaison de deux mesures

- On a deux mesures $a \pm \triangle a$ et $b \pm \triangle b$ d'une même grandeur.
  On dit que ces mesures sont compatibles si 0 est une valeur possible de $a - b$ la différence de ces deux mesures.

EXEMPLE

Anne et Jean mesurent la vitesse d'une balle de tennis.
Anne trouve $3,6 \pm 0,2$*m/s et Jean trouve* $3,3 \pm 0,3$ *m/s.*
Ces mesures sont-elles compatibles ?

-
- **Réponse :** Pour cela, on pose $c = a - b$.
  Alors $c = 0,3$ et $\triangle c = \triangle a + \triangle b = 0,2 + 0,3 = 0,5$, d'où la mesure de c

$$0,3 \pm 0,5 \; m/s.$$

Comme 0 est une valeur possible de c, les valeurs mesurées par Anne et Jean peuvent être égales, elles sont donc compatibles.

Dérivées partielles

Soit f une fonction de trois variables définie sur une partie D de $\mathbb{R}^3$ et soit $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ un point de D.
La fonction $f_1 : x \mapsto f(x,\ y_0,\ z_0)$ est appelée fonction partielle par rapport à la première coordonnée (x) associée à f au point $(x_0,\ y_0,\ z_0)$.
De même $f_2 : y \mapsto f(x_0,\ y,\ z_0)$ est appelée fonction partielle par rapport à la deuxième coordonnée (y) associée à f au point $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ et
$f_3 : z \mapsto f(x_0,\ y_0,\ z)$ est appelée fonction partielle par rapport à la troisième coordonnée (z) associée à f au point $(x_0,\ y_0,\ z_0)$.

Exemple

Soit la fonction f définie par $f(x,\ y,\ z) = \dfrac{x^2+z^2}{1+y^2}$. *Elle est définie sur* $\mathbb{R}^3$.

Considérons le point $a = (x_0,\ y_0,\ z_0) = (1,1,1)$ *de* $\mathbb{R}^3$.

La fonction partielle par rapport à la première coordonnée associée à f au point a est $f_1 : x \mapsto f(x,1,1) = \frac{x^2+1}{2}$

De même on définit les fonctions partielles par rapport à la deuxième coordonnée $f_2 : y \mapsto f(1,y,1) = \frac{2}{1+y^2}$ et par rapport à la troisième coordonnée $f_3 : z \mapsto f(1,1,z) = \frac{1+z^2}{2}$

Définition (Dérivées partielles en un point)

Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}^3$ et soit $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ un point de D. La fonction f_1 définie précédemment est une fonction d'une seule variable. Si elle est dérivable, sa dérivée au point x_0 s'appelle la dérivée partielle première de f par rapport à x au point $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ et se note $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,\ y_0,\ z_0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,\ y_0,\ z_0) = f_1'(x_0)$$

De même on définit les dérivées premières partielles par rapport à y et à z au point $(x_0,\ y_0,\ z_0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\ y_0,\ z_0) = f_2'(y_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,\ y_0,\ z_0) = f_3'(z_0)$$

Exemple

(suite) Pour $f(x,\ y,\ z) = \dfrac{x^2+z^2}{1+y^2}$*. La fonction* f_1 *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $\forall x \in \mathbb{R},\ f_1'(x) = x$ *donc la dérivée partielle de* f *par rapport à* x *au point (1, 1, 1) est*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1) = f_1'(1) = 1$$

De même la fonction f_2 *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $\forall y \in \mathbb{R},\ f_2'(y) = \dfrac{-4y}{(1+y^2)^2}$ *donc la dérivée partielle de* f *par rapport à* x *au point (1, 1, 1) est*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1) = f_2'(1) = -1$$

Enfin, la fonction f_3 *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $\forall y \in \mathbb{R},\ f_3'(z) = z$ *donc la dérivée partielle de* f *par rapport à* z *au point (1, 1, 1) est*

$$\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1) = f_3'(1) = 1$$

Calcul de l'incertitude absolue : Fonction de plusieurs variables

- On écrit la différentielle de $f(x, y)$ en fonction des dérivées partielles par rapport à chacune des variables $x, y \ldots$
- En se limitant ici à deux variables :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

- On approxime alors $df \simeq \triangle f$, et on majore la valeur absolue de $\triangle f$ par la somme des valeurs absolues (inégalité triangulaire), soit :

$$\triangle f \approx |\frac{\partial f}{\partial x}| \triangle x + |\frac{\partial f}{\partial y}| \triangle y,$$

- ce qui permet de (sur)estimer l'incertitude $\triangle f$ en fonction des incertitudes $\triangle x$ et $\triangle y$.
- On peut généraliser au cas d'un nombre quelconque de variables.

Calcul de l'incertitude absolue :Fonction de plusieurs variables

Cas général

- On a une grandeur $f(x_1, \ldots, x_n)$ qui ne dépend uniquement des grandeurs $x_1 \ldots x_n$
- On mesure $a_1, \ldots a_n$ pour les grandeurs $x_1 \ldots x_n$ avec les incertitudes absolues $\triangle x_1 \ldots \triangle x_n$

Théorème

L'incertitude absolue $\triangle f$ est donnée par

$$\triangle f = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, \ldots, a_n)\right| \triangle x_1 + \ldots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, \ldots, a_n)\right| \triangle x_n$$

On a les mêmes règles pour les sommes et produits

THÉORÈME

Si f est une combinaison de sommes et de soustractions de fonctions à variables séparées :

$$f = f_1 + f_2 + \ldots + f_n - g_1 - g_2 - \ldots - g_m$$

alors l'incertitude absolue est la somme des incertitudes absolues :

$$\boxed{\triangle f = \triangle f_1 + \triangle f_2 + \ldots + \triangle f_n + \triangle g_1 + \triangle g_2 + \ldots + \triangle g_m}$$

Théorème

Si f est une combinaison de multiplications et de divisions de fonctions :

$$f = \frac{f_1 f_2 \ldots f_n}{g_1 g_2 \ldots g_m}$$

alors l'incertitude relative est la somme des incertitudes relatives :

$$\boxed{\frac{\triangle f}{f} = \frac{\triangle f_1}{f_1} + \frac{\triangle f_2}{f_1} + \ldots + \frac{\triangle f_n}{f_n} + \frac{\triangle g_1}{g_1} + \frac{\triangle g_2}{g_2} + \ldots + \frac{\triangle g_m}{g_m}}$$

EXEMPLE

On mesure la longueur L et la largeur d'une plaque, on obtient

$$L = 11,3 \pm 0,15\ m \qquad l = 5,53 \pm 0,07\ m$$

Quelle est l'incertitude absolue et relative sur la surface $S = L \times l$ de la plaque ?

-
- **Réponse :** On a $S = L \times l$, d'après la règle du produit on a

$$\frac{\triangle S}{S} = \frac{\triangle L}{L} + \frac{\triangle l}{l} = \frac{0,15}{11,3} + \frac{\triangle 0,07}{5,53} = 0,013 + 0,012 = 0,015 = 1,5\%.$$

Ainsi, $\triangle S = S\left(\frac{\triangle S}{S}\right) = 11,3 \times 5,53 \times 0,015 m^2 = 0,93 m^2$.

D'où la mesure de la surface de la plaque v est $v \pm \triangle v = 62,49 \pm 0,93 m^2$.