Règle de l'Hôpital

Théorème (Règle de l'Hôpital)

Soient f et g deux fonctions de la variable réelle dérivables sur $J = I - \{x_0\}$ et telle que g et g' ne s'annulent pas sur J.

On suppose que $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ présente lorsque $x \to x_0$

soit une forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$ ou une forme indéterminée $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Alors, si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, on aura

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(sous la condition que l'on connaisse l'existence de la deuxième limite, celle-ci pouvant être infinie.)

Exemple (Intéret de la règle de l'Hôpital :)

Dans de nombreux cas, il est plus facile de chercher la limite du rapport des dérivées des fonctions, que celle des rapports des fonctions elles-mêmes :
Soient, $f(x) = 1 - \cos x$ *et* $g(x) = \tan x$ *sur* $I =]0, \frac{\pi}{4}]$.
Alors $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1-\cos x}{\tan x}$ *présente lorsque* $x \to 0^+$ *une forme indéterminée* $\dfrac{0}{0}$.
D'autre part, $f'(x) = \sin x$, $g'(x) = 1 + (\tan x)^2$ *et comme* $\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0$, *ainsi d'après la règle de l'Hôpital*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0.$$

Exemple

1. $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln(x))'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0.$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin(x))'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1.$
3. $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{(e^x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{(e^x)'}{(2x)'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty.$

EXPRESSION CONJUGUÉE

Soient f et g deux fonctions telles que $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$. On cherche à calculer $\lim_{x \to a} (f+g)(x)$.

- Simplification possible est d'utiliser la quantité conjuguée :

EXEMPLE

Soit à calculer $\lim_{x \to +\infty} (x - 1 - \sqrt{x^2 - 1})$.

On a $x - 1 - \sqrt{x^2 - 1} = (x - 1 - \sqrt{x^2 - 1}) \dfrac{x - 1 + \sqrt{x^2 - 1}}{x - 1 + \sqrt{x^2 - 1}}$

$= \frac{(x-1)^2 - (\sqrt{x^2-1})^2}{x-1+\sqrt{x^2-1}} = \frac{-2x+2}{x-1+\sqrt{x^2-1}}$

$= \frac{x}{x} \frac{-2+\frac{2X}{x}}{1-\frac{1}{x}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$

d'où $\lim_{x \to +\infty} x - 1 - \sqrt{x^2 - 1} = -1$.

-

Produits d'exponentielle

- Pour tous $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ on a

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\alpha} e^{-x^{\beta}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\alpha}}{e^{x^{\beta}}} = 0$$

- Pour tous $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ on a

$$\lim_{x \to +\infty} x^{-\alpha} e^{x^{\beta}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x^{\beta}}}{x^{\alpha}} = +\infty$$

- Pour tous $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ on a

$$\lim_{x \to 0^+} x^{\alpha} \ln(x^{\beta}) = 0$$

- Pour tous $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ on a

$$\lim_{x \to +\infty} x^{-\alpha} \ln(x^{\beta}) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^{\beta})}{x^{\alpha}} = 0$$

- Pour tous $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ on a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\alpha}}{\ln(x^{\beta})} = +\infty$$

Théorème des gendarmes

Théorème (Théorème des gendarmes)

Soient f, g et h des fonctions définies au voisinage de a (c'est à dire un intervalle ouvert contenant a ou admettant a comme extrémité) et vérifiant sur ce voisinage

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

Si $\lim_{x\to a} f = \lim_{x\to a} h(x) = l$ alors $\lim_{x\to a} g(x) = l$.

•

Exemple

Soit à calculer $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2+1}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, d'où $\frac{-1}{x^2+1} \leq \frac{\sin(x)}{x^2+1} \leq \frac{1}{x^2+1}$.

Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$. *D'après le théorème des gendarmes, on déduit que* $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2+1} = 0$.

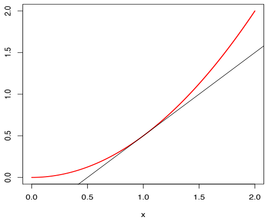
DÉRIVÉE

DÉFINITION

Une fonction f est dite dérivable au point a si le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ *admet une limite finie lorsque x tend vers a. Cette limite est appelée alors la dérivée de f au point a et notée* $f'(a)$.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a).$$

-



-

- L'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f en a est :
- $\boxed{y = f(a) + f'(a)(x - a)}$
  La dérivée $f'(a)$ correspond géométriquement à la pente d'une tangente à la courbe.
  Physiquement, une dérivée s'interprète comme une taux instantané de croissance ou une vitesse instantanée.

EXEMPLE

La tangente à la courbe de $f(x) = 2x^3$ en $a = 1$ a pour équation

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) = 2 + 6(x - 1) = 6x - 4.$$

-

A partir de l'étude du signe de la dérivée, on va déterminer le sens de variation de la fonction à étudier. En effet, graphiquement, "si la pente de la tangente est positive alors la fonction croit".

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ dans le domaine de dérivabilité de f.

1. Si, pour tout x de I, $f'(x) = 0$ alors f est constante sur I.
2. Si, pour tout x de I, $f'(x) \geq 0$ (resp ≤ 0) alors f est croissante (resp. décroissante) sur I.
3. Si, pour tout x de I, $f'(x) > 0$ (resp. < 0) alors f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I.

Opérations sur les dérivées

Soient u et v deux fonctions dérivable sur un domaine D, soit λ une constante alors pour tout x élément de D on a

- $$(\lambda u)'(x) = \lambda u'(x)$$
- $$(u+v)'(x) = u'(x) + v'(x)$$
- $$(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

- $\dfrac{1}{v}$ est dérivable en tout point x de D où v ne s'annule pas et

$$\left(\frac{1}{v}\right)'(x) = \frac{-v'(x)}{v(x)^2}$$

- de même pour $\dfrac{u}{v}$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$$

- Fonction composée : soit u une fonction dérivable en x_0 et soit v une fonction dérivable en $u(x_0)$, alors $v \circ u$ est dérivable en x_0 et

$$(v \circ u)'(x_0) = v'(u(x_0))u'(x_0)$$

Exemple

La dérivée de la fonction $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ *est* $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Petit tableau récapitulatif

$f(x)$	$f'(x)$	
$(u+v)(x)$	$u'(x)+v'(x)$	
$u(x)v(x)$	$u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$	
$\dfrac{u(x)}{v(x)}$	$\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2}$	sur un intervalle où v ne s'annule pas
$\dfrac{1}{v(x)}$	$\dfrac{-v'(x)}{v(x)^2}$	sur un intervalle où v ne s'annule pas
$(v \circ u)(x)$	$u'(x)(v' \circ u)(x)$	pour x tel que u dérivable en x et v en $u(x)$

Exemple

Soit $f(x) = \dfrac{x^4 - x^2 + 4}{x^2 - 4}$*. La fonction* f *est paire et définie sur* $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$*. Son domaine d'étude est* $[0, 2[\cup]2, +\infty[$*. La fonction* f *est dérivable sur son domaine d'étude car c'est une fonction rationnelle. Pour tout* x *dans* $[0, 2[\cup]2, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{2x^3(x^2 - 8)}{(x^2 - 4)^2}$$

$f'(x)$ *est du signe de* $x^3(x^2 - 8)$ *sur le domaine d'étude de* f*, donc du signe de* $x^2 - 8$ *: pour tout* $x \in [0, 2[\cup]2, 2\sqrt{2}]$*,* $f'(x) \leq 0$ *et pour tout* $x \in [2\sqrt{2}, +\infty[$*,* $f'(x) \geq 0$.

Tableau de variation de $f(x) = \dfrac{x^4 - x^2 + 4}{x^2 - 4}$

x	0			‖			$2\sqrt{2}$		$+\infty$
				2					
$f'(x)$		-		‖		-	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$	‖	$+\infty$	$\searrow$	$f(2\sqrt{2})$	$\nearrow$	$+\infty$

■

Soit f une fonction numérique définie sur une partie de $\mathbb{R}$ et soit C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

- Si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ alors C_f admet une asymptote verticale d'équation $x = a$.
- Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$ alors C_f admet une asymptote horizontale d'équation $y = b$.
- Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ on recherche une éventuelle direction asymptotique en étudiant $\dfrac{f(x)}{x}$.
- Si $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$, et si $\lim_{x\to\infty} f(x) - ax = b$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à C_f

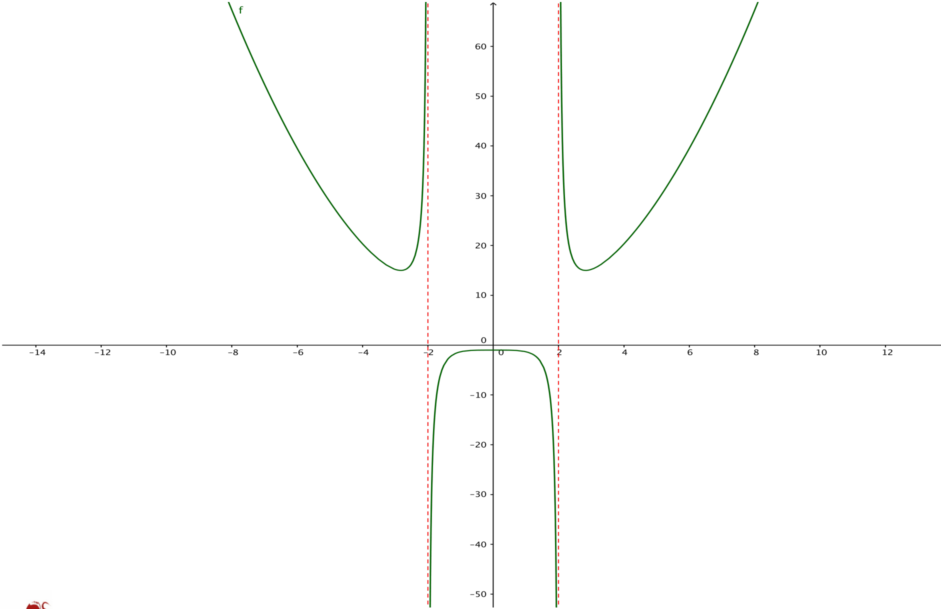
UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Soit f une fonction numérique définie sur une partie de $\mathbb{R}$ et soit C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé. On suppose $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

- Si $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ alors l'axe (Ox) est direction asymptotique. On dit que C_f admet une branche parabolique dans la direction (Ox).
- Si $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$ alors l'axe (Oy) est direction asymptotique. On dit que C_f admet une branche parabolique dans la direction (Oy).
- Si $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ et si $\lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = \infty$ alors C_f présente une branche parabolique dans la direction de la droite d'équation $y = ax$.

Exemple

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^4 - x^2 + 4}{x^2 - 4}$ *tend vers* $+\infty$ *lorsque* x *tend vers* 2^+ *et vers* $-\infty$ *lorsque* x *tend vers* 2^-*, elle admet donc une droite asymptote verticale d'équation* $x = 2$.
D'autre part $\frac{f(x)}{x}$ *tend vers* $+\infty$ *en* $+\infty$ *donc admet une branche parabolique dans la direction* (Oy). ■


f
60
50
40
30
20
10
0
−10
−20
−30
−40
−50
−14
−12
−10
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6
8
10
12

THÉORÈME

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \to J$ qui admet une fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$. On suppose que f' ne s'annule pas sur I, alors pour tout $x \in J$ on a

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

-

EXEMPLE

La fonction $\mathrm{Arcsin}[-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *est la fonction inverse de*
$\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$
Alors pour tout $x \in]-1,1[$, $\sin(\mathrm{Arcsin}(x)) = x$ *et*

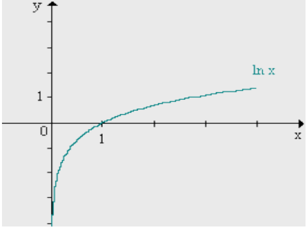
$$\mathrm{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\cos(\mathrm{Arcsin}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin(\mathrm{Arcsin}(x)))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Logarithme népérien

DÉFINITION

La fonction **logarithme népérien** *notée* ln *définie sur* $]0,+\infty[$ *est la fonction telle que sa dérivée est* $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ *et* $\ln(1) = 0$.

- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$,
- $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$, pour tous $a, b > 0$
- $\ln(a^\alpha) = \alpha \ln(a)$, pour tous $a > 0$ et α réel

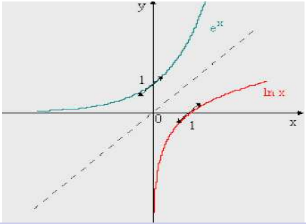


Exponentielle

DÉFINITION

La fonction **exponentielle** *notée* e^x, *est la fonction réciproque de* $\ln(x)$, *elle est définie sur* $\mathbb{R}$ *et vérifie,* $y = e^x = exp(x) \Leftrightarrow x = \ln(y)$.

- $(e^x)' = e^x$
- $e^0 = 1, \qquad e^1 = e = 2,718...$
- $e^{a+b} = e^a e^b$
- $e^{\alpha x} = (e^x)^\alpha$.



Les fonctions puissances

Cas particuliers :

- x^n avec n un entier naturel,
- x^k avec k un entier relatif
- x^r avec r un nombre rationnel

  Cas général :
- x^a avec a un réel quelconque.

x^n avec n un entier naturel

DÉFINITION

Pour tout réel x et tout entier naturel n on a

$$x^n = \underbrace{x.x....x}_{n \text{ fois}}$$

Par convention : $x^0 = 1$.

- sa dérivée $(x^n)' = nx^{n-1}$.
- x^n est une fonction paire (resp. impaire) si n est pair (resp. impair) sa fonction réciproque sur $[0, +\infty[$ est la fonction **racine nième**
- $\boxed{y = x^n \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y}.}$

x^r avec r un nombre rationnel

- Si n est un entier > 0 et $x \neq 0$ on pose : $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

Exemple

$x^{-1} = \frac{1}{x}$ *et* $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$.

- Si n est un entier > 0, et $x \geq 0$ on pose : $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.

Exemple

$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ *et* $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$.

Définition

Pour tout nombre rationnel $r = \frac{m}{n}$ *on définit la fonction* x^r *sur* $]0, +\infty[$ *par*

$$x^r = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$$

Sa dérivée est : $(x^r)' = rx^{r-1}$.

Exemple

- $(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $(x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

Généralisation : x^a avec a un nombre réel

DÉFINITION

Pour tout nombre réel a on définit pour $x > 0$, x^a *par*

$$x^a = e^{a\ln(x)}.$$

La fonction $x \mapsto x^a$ *est définie sur* $]0, +\infty[$, *sa dérivée est :*

$$(x^a)' = ax^{a-1}.$$

- Soient a et b deux réels et $x > 0$ et $y > 0$
- $x^{a+b} = x^a x^b$
- $x^{ab} = (x^a)^b = (x^b)^a.$
- $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$
- $(xy)^a = x^a y^a$

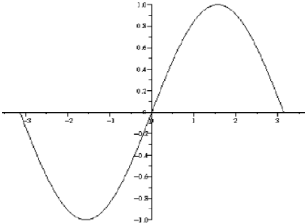
UNIVERSITÉ DE RENNES 1

- Sinus
- Cosinus
- Tangente
- Cotangente

Fonction sinus

- La fonction sinus, notée $\sin(x)$, est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$,
- elle est impaire et périodique de période 2π. On peut l'étudier sur $[0, \pi]$.
- Pour tout x dans $\mathbb{R}$,

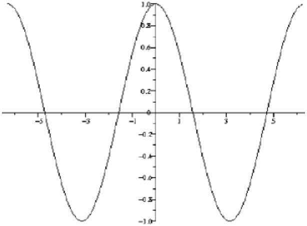
$$\sin'(x) = \cos(x)$$

- Elle est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et décroissante sur $[\frac{\pi}{2}, \pi]$.
- 

Fonction cosinus

- La fonction cosinus, notée $\cos(x)$, est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$,
- elle est paire et périodique de période 2π. On peut l'étudier sur $[0,\ \pi]$.
- Pour tout x dans $\mathbb{R}$,

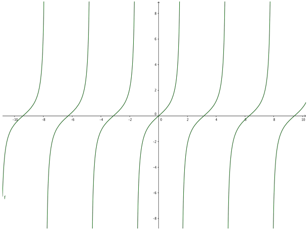
$$\cos'(x) = -\sin(x)$$

- Elle est décroissante sur $[0, \pi]$.
- 

Fonction tangente

- La fonction tangente, notée $\tan(x)$, est définie sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ par $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$,
- elle est impaire et périodique de période π. On peut l'étudier sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.
- Pour tout x élément de $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ on a,

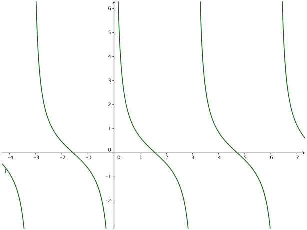
$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

- 

Fonction cotangente

- La fonction cotangente, notée $\text{cotan}(x)$, est définie sur $\mathbb{R} - \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ par $\text{cotan}(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$,
- elle est impaire et périodique de période π. On peut l'étudier sur $]0, \dfrac{\pi}{2}]$.
- Pour tout x élément de $\mathbb{R} - \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ on a,

$$\text{cotan}'(x) = \frac{-1}{\sin^2(x)} = -(1 + \text{cotan}^2(x))$$



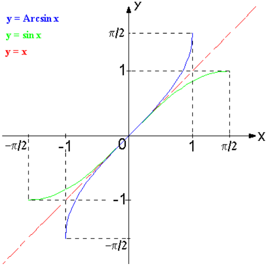
Fonctions réciproques des fonctions trigonométriques

- Arcsinus
- Arccosinus
- Arctangente
- Arccotangente

Fonction Arcsinus

- Arcsinus est la fonction réciproque de la restriction de sin : $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$, notée $Arcsin(x)$, est définie sur $[-1, 1]$,
- $y = \text{Arcsin}(x) \Leftrightarrow x = \sin(x)$
- elle est impaire et pour tout x dans $]-1, 1[$,

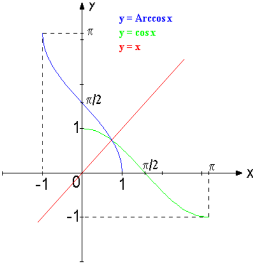
$$\text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- 

Fonction Arccosinus

- Arccosinus est la fonction réciproque de la restriction de $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$, notée $Arccos(x)$, elle est définie sur $[-1, 1]$.
- $y = \text{Arccos}(x) \Leftrightarrow x = \cos(x)$
- elle est paire et pour tout x dans $]-1, 1[$,

$$\text{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

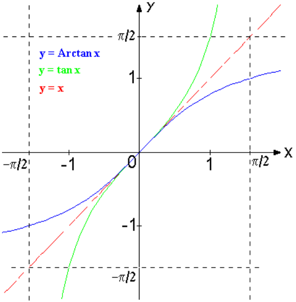


-

Fonction Arctangente

- Arctangente est la fonction réciproque de la restriction de $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to]-\infty, +\infty[$, notée $\text{Arctan}(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$,
- $y = \text{Arctan}(x) \Leftrightarrow x = \tan(y)$
- elle est impaire et pour tout x nombre réel on a,

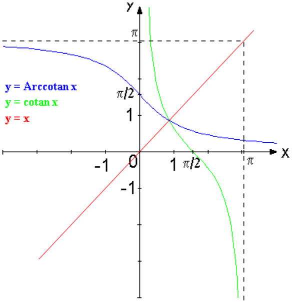
$$\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

- 

Fonction Arccotangente

- Arccotangente est la fonction réciproque de la restriction de cotan $:]0,\pi[\to]-\infty,+\infty[$, notée $\text{Arccotan}(x)$, est définie sur $\mathbb{R}$,
- $y = \text{Arccotan}(x) \Leftrightarrow x = \text{cotan}(y)$
- elle est impaire et pour tout x élément de $\mathbb{R}$ on a,

$$\text{Arccotan}'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$$



Sinus et cosinus : formules fondamentales

$$\sin^2(a)+\cos^2(a)=1$$

$$\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b) \tag{1}$$
$$\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b) \tag{2}$$
$$\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b) \tag{3}$$
$$\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b) \tag{4}$$
$$\tan(a+b)=\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)} \tag{5}$$

En particulier avec $b=a$ dans (1) et (3) :
$\cos(2a)=\cos^2(a)-\sin^2(a)=2\cos^2(a)-1=1-2\sin^2(a)$
$\sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)$

Fonction f	Domaine de f	Fonction f'	Domaine de f'
$x^n, \quad n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n}, \quad n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}, \quad n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}_+$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$
$a^x, \quad a > 0$	$\mathbb{R}$	$a^x \ln(a)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
$\mathrm{cotan}(x)$	$\mathbb{R} - \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$	$\frac{-1}{\sin^2(x)} = -(1 + \mathrm{cotan}^2(x))$	$\mathbb{R} - \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
$\mathrm{Arcsin}(x)$	$[-1,1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$
$\mathrm{Arccos}(x)$	$[-1,1]$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$
$\mathrm{Arctan}(x)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{Arccotan}(x)$	$\mathbb{R}$	$\frac{-1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$