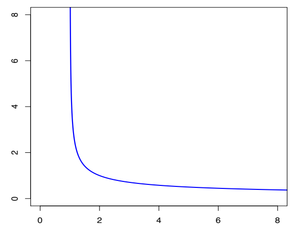
Definition

Le graphe d'une fonction f est l'ensemble des points $(x, f(x))$ avec $x \in D_f$

$$\mathrm{graph}(f) = \{(x, f(x)) |\ x \in D_f\}.$$

Exemple

Pour $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x-1}}$ *on a* $D_f =]1, +\infty[$ *et son graphe*



Soient f et g deux fonctions réelles définies sur D_f et D_g respectivement.

1. Le produit est défini par : $(fg)(x) = f(x).g(x)$.

$$D_{fg} = D_f \cap D_g$$

2. La somme est définie par : $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

3. La fonction inverse : $\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$ est définie sur

$$D_{\frac{1}{f}} = \{x \in D_f \,|\, f(x) \neq 0\}.$$

4. Le quotient : $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ est défini sur

$$D_{\frac{f}{g}} = \{x \in D_f \cap D_g \,|\, g(x) \neq 0\}.$$

1. La compositon : $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ est définie

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\}$$

2. La multiplication par un réel λ : : $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.

$$D_{\lambda f} = D_f.$$

En particulier si $\lambda = -1$, on a

$$(-f(x)) = -\ f(x) \text{ et } D_{-f} = D_f.$$

Fonction réciproque

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et telle que $f(I) = J$.

1. f admet une fonction réciproque s'il existe une fonction $g : J \to I$ telle que

$$g \circ f(x) = x \text{ et } f \circ g(y) = y$$

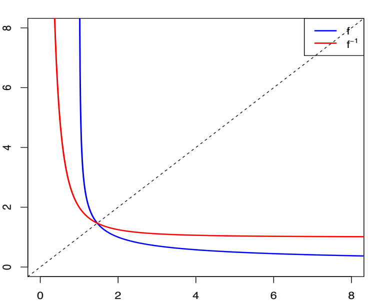
pour tous $x \in I$ et $y \in J$.

2. g est alors notée f^{-1}.

Exemple

Pour $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x-1}}$ *on a* $D_f =]1, +\infty[$

$f^{-1}(y) = 1 + \dfrac{1}{y^2}$ *et* $D_{f^{-1}} = \mathbb{R} - \{0\}$.



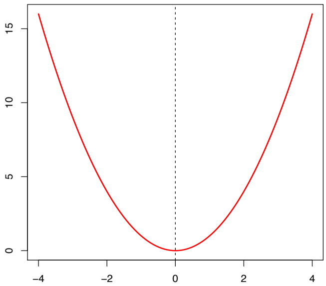
DÉFINITION

La fonction f est paire si :
le domaine de f est symétrique par rapport à 0 : i.e. pour tout x dans D_f, $-x$ est dans D_f et pour tout x dans D_f

$$f(-x) = f(x)$$

OBSERVATION

Le graphe de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
Conséquence : On restreint le domaine d'étude $D = D_f \cap [0, +\infty[$.


15
10
5
0
−4
−2
0
2
4

Exemple

La fonction $f(x) = \frac{x^4 - x^2 + 4}{x^2 - 4}$ *est paire à étudier sur* $]0,2[\cup]2,+\infty[$.

-
- Généralisation : symétrie par rapport à une droite verticale.

  Le graphe de f sera symétrique par rapport à la droite $x = x_0$ si
  1. Le domaine D_f est symétrique par rapport à x_0 : pour tout x réel, si $x - x_0$ est dans D_f alors $x_0 + x$ est dans D_f ;
  2. la fonction f présente une symétrie : pour tout x réel tel que $x + x_0$ est dans D_f, et

$$f(x_0 + x) = f(x_0 - x)$$

On restreint alors le domaine d'étude à $D_f \cap [x_0, +\infty[$.

Exemple

La fonction $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1908x + 1822000$ *est symétrique par rapport à* $x = 1908$.

DÉFINITION

La fonction f est impaire si :
le domaine de f est symétrique par rapport à 0 : i.e. pour tout x dans D_f, $-x$ est dans D_f et pour tout x dans D_f

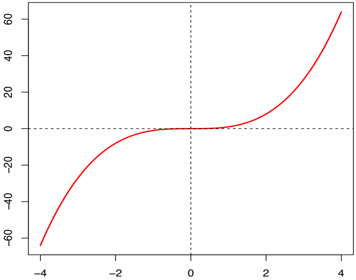
$$f(-x) = -f(x)$$

-

OBSERVATION

Le graphe de f est symétrique par rapport à l'origine 0.
Conséquence : On restreint le domaine d'étude $D = D_f \cap [0, +\infty[$.

-


60
40
20
0
−20
−40
−60
−4
−2
0
2
4

Exemple

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ et impaire, on peut restreindre son étude à $[0, +\infty[$.

-
- Généralisation : symétrie par rapport à un point. Le graphe de f présente une symétrie par rapport à $(x_0,\ y_0)$ si :
  1. Le domaine D_f est symétrique par rapport à x_0 : pour tout x réel, si $x - x_0$ est dans D_f alors $x_0 + x$ est dans D_f ;
  2. la fonction f présente une symétrie : pour tout x réel tel que $x + x_0$ est dans D_f,
  $$f(x_0 + x) + f(x_0 - x) = 2y_0$$
  On restreint alors le domaine d'étude à $D_f \cap [x_0, +\infty[$.

Exemple

Le graphe de la fonction $x \mapsto \dfrac{1+x}{x}$ a pour centre de symétrie le point $(0, 1)$.

DÉFINITION

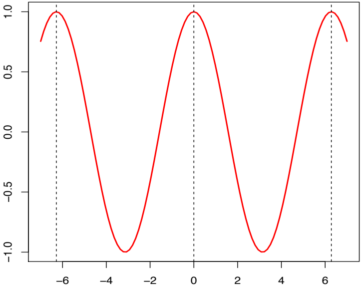
Soit T un réel strictement positif, $T > 0$. On dit que f est périodique et de période T si

1) *pour tout x dans D_f, $x + T$ est dans D_f ;*
2) *pour tout x dans D_f, $f(x + T) = f(x)$*

OBSERVATION 1

Le graphe de f est invariant par les translations de vecteurs horizontaux de longueur T.

Conséquence : On restreint alors le domaine d'étude à un intervalle de longueur T, par exemple $D_f \cap [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$.


1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−6
−4
−2
0
2
4
6

Observation 2

Dans ce cas $f(x) = f(x+T) = f(x+2T) = \ldots = f(x+nT)$ et $f(x) = f(x-T) = f(x-2T) = \ldots = f(x-nT)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

-

Exemple

La fonction sin *est périodique de période* 2π*, il suffit de l'étudier sur* $[-\pi, \pi]$*. Mais, si on prend en compte sa parité, on peut restreindre l'étude à :*

$$D = [-\pi, \pi] \cap [0, +\infty[= [0, \pi].$$

-

Exemple

La fonction $x \mapsto \cos(2x)$ *est à la fois périodique de période* π *et paire donc on peut réduire son domaine d'étude à* $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Soit f une fonction définie sur un domaine D_f , et $a \in \mathbb{R}$
f admet une limite l à gauche (respectivement à droite) en a si et seulement si :

- $a \in D_f$ ou a est une borne de D_f
- lorsque x tend vers a par valeurs inférieures, $f(x)$ tend vers l
- respectivement
- lorsque x tend vers a par valeurs supérieures, $f(x)$ tend vers l.
- On note alors

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = l$$

$$\left(\text{ respectivement } \lim_{x \to a^+} f(x) = l\right)$$

EXEMPLE

$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2+1}{x^2} = +\infty, \quad \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2+1}{(x-2)(x+1)} = -\infty$

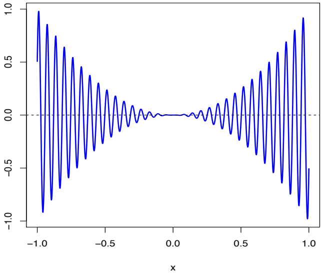
UNIVERSITÉ DE RENNES 1

DÉFINITION

La fonction f admet une limite $l \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers a,
$(a \in \mathbb{R},\ a = +\infty \text{ ou } -\infty)$ *si :*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = l.$$

-



-

Exemple

1. $\lim_{x \to -1} 2x^3 + 5x + 6 = -1$
2. $\lim_{x \to 1^-} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^2} \right) = +\infty$
3. $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} \right) = 0$
4. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$

1. Limite d'une fonction polynomiale à l'infini : mettre en facteur le terme de plus haut degré.
2. Limite d'une fonction rationnelle à l'infini : mettre en facteur le terme de plus haut degré, pour le numérateur et pour le dénominateur.

EXEMPLE

3
1. *Soit* $f(x) = \dfrac{x^4 - x^2 + 4}{x^2 - 4}$. *Alors* $f(x) = \dfrac{x^4(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^4})}{x^2(1 - \frac{4}{x^2})} = \dfrac{x^2(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^4})}{(1 - \frac{4}{x^2})}$
   D'où $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *et* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
2. *D'autre part si on écrit,* $f(x) = \dfrac{1}{x-2} . \dfrac{x^4 - x^2 + 4}{x+2}$, *on voit que* $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$ *et que* $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)$	$\lim\limits_{x\to a}(fg)(x)$
α	β	$\alpha+\beta$	$\alpha\beta$
$\alpha\neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
0	$\beta\neq 0$	β	0
0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	f. i. $0\times\infty$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	f. i. $\pm\infty\times\pm\infty$	$\pm\infty$

$\lim_{x\to a} f(x)$	$\lim_{x\to a} g(x)$	$\lim_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\lim_{x\to a} (f\circ g)(x)$
$\alpha \neq 0$	$\beta \neq 0$	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\lim_{x\to\beta} f(x)$
$\alpha \neq 0$	0	$\pm\infty$	$\lim_{x\to 0} f(x)$
$\alpha \neq 0$	$\pm\infty$	0	$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$
0	0	forme indeterminée $\frac{0}{0}$	$\lim_{x\to 0} f(x)$
0	$\pm\infty$	0	$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$
$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	$\lim_{x\to 0} f(x)$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$	$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$

Formes indéterminées

$$\frac{0}{0}, \quad 0 \times \infty, \quad \infty - \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}$$

Exercice 1

À l'aide des opérations sur les limites, déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} x(x-3)$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x^2(x+2)-1)$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3-x^2+4$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} -x^3(x+\dfrac{3}{x})$

5) $\lim\limits_{x\to2^-} \dfrac{x^4-x^2+4}{x^2-4}$

Réponse

Exercice 2

Montrer que les fonctions suivantes sont définies sur $\mathbb{R}$ et déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$

1) $f : x \to -x^3 + 2x^2 - 4$
2) $g : x \to \sqrt{x^2+1} - 1$
3) $h : x \to \dfrac{x}{2+3x^2}$
4) $k : x \to \dfrac{9x^3+1}{x^2-4x+5}$

Réponse

Réponse : exercice 1

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} x(x-3) = +\infty$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} [-x^2(x+2)-1] = +\infty$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x^3}) = -\infty$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} -x^3(x+\dfrac{3}{x}) = -\infty$

5) On écrit, $\dfrac{x^4-x^2+4}{x^2-4} = \dfrac{1}{x-2}.\dfrac{x^4-x^2+4}{x+2}$, comme $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^4-x^2+4}{x+2} = 4$ on aura $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^4-x^2+4}{x^2-4} = -\infty$.

Réponse : exercice 2

1) 1. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2(-x+2-\frac{4}{x^2})$

   or $\lim_{x\to+\infty}(-x+2-\frac{4}{x^2}) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ d'o'u $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

   2. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2(-x+2-\frac{4}{x^2})$

   or $\lim_{x\to-\infty}(-x+2-\frac{4}{x^2}) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ d'où $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

2) 1. $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$:

   car, $\lim_{x\to+\infty} x^2+1 = +\infty$ d'où, $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$

   d'où $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - 1 = +\infty$

2. $\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$:
car, $\lim_{x \to -\infty} x^2 + 1 = +\infty$ d'où, $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$
ainsi $\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + 1} - 1 = +\infty$.

3) 1. $\lim_{x \to +\infty} h(x) = 0$:
car, $\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\frac{2}{x} + 3x}$
or, $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} + 3x = \lim_{x \to +\infty} 3x = +\infty$ d'où, $\lim_{x \to +\infty} h(x) = 0^+$

2. $\lim_{x \to -\infty} h(x) = 0$:
car $\lim_{x \to -\infty} h(x) = \lim_{x \to -\infty} \dfrac{1}{\frac{2}{x} + 3x}$
or, $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{2}{x} + 3x = \lim_{x \to -\infty} 3x = -\infty$ d'où, $\lim_{x \to -\infty} h(x) = 0^-$.

4)

1. $\lim_{x\to+\infty} k(x) = +\infty$:

$$\text{car } \lim_{x\to+\infty} k(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(9x+\frac{1}{x^2})}{x^2(1-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{9x+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}$$

or, $\lim_{x\to+\infty} 9x + \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{4}{x} + \dfrac{5}{x^2} = 1$ d'où $\lim_{x\to+\infty} k(x) = +\infty$

2. $\lim_{x\to-\infty} k(x) = -\infty$:

$$\text{car } \lim_{x\to-\infty} k(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2(9x+\frac{1}{x^2})}{x^2(1-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2})} = \lim_{x\to-\infty} \frac{9x+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}$$

or, $\lim_{x\to-\infty} 9x + \dfrac{1}{x^2} = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} 1 - \dfrac{4}{x} + \dfrac{5}{x^2} = 1$ d'où $\lim_{x\to-\infty} k(x) = -\infty$