Mathématiques (Analyse)

Corrigé de l'examen du 7 janvier 2016

Exercice 1 *(points)*

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{4x^2 - 5x + 17}{x - 1}$.

1) Le domaine de définition de f : $\boxed{D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[}$

2) $f'(x) = \dfrac{(8x-5)(x-1) - (4x^2 - 5x + 17)}{(x-1)^2} = \dfrac{4x^2 - 8x - 12}{(x-1)^2} = \dfrac{4(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$.

3) Le tableau des signes de la dérivée :

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$x-3$		$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$(x-1)^2$		$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

4) $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$

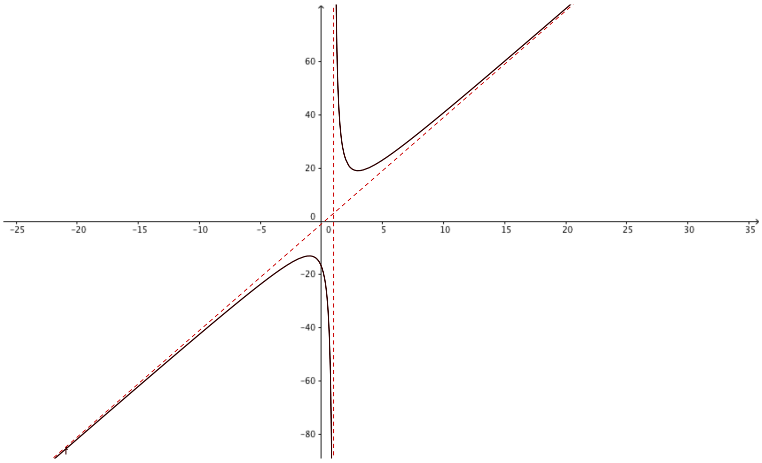
$\boxed{\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty}$

5) Le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	-13	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	19	$\nearrow$	$+\infty$

6) Par identification on a
$4x - 1 + \dfrac{16}{x-1} = \dfrac{(4x-1)(x-1)+16}{x-1} = \dfrac{4x^2 - 5x + 17}{x-1} = f(x)$ par suite $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (4x-1) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{16}{x-1} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (4x-1) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{16}{x-1} = 0$, alors la courbe représentative de f admet une asymptote oblique d'équation $y = 4x - 1$.

7) L'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.



8) **Question bonus :** on a $f(1+x)+f(1-x) = \dfrac{4(1+x)^2-5(1+x)+17}{1+x-1}+\dfrac{4(1-x)^2-5(1-x)+17}{1-x-1} =$
$\dfrac{4(1+x)^2-5(1+x)+17}{x}+\dfrac{4(1-x)^2-5(1-x)+17}{-x} = \dfrac{6x}{x} = 6,$
le point $(1,3)$ est donc un centre de symétrie de la courbe représentative de f.

Exercice 2 *(points)*

1) Le nombre $N(t)$ d'individus d'une population d'animaux augmente au cours du temps t exprimé en années à la vitesse de $N'(t) = 2t + e^t$.
La population a augmenté entre la troisième et la sixième année de

$$\boxed{N(6)-N(3) = \int_3^6 N'(t)\ dt = \int_3^6 (2t+e^t)\ dt = \left[t^2+e^t\right]_3^6 = 6^2+e^6-3^2-e^3 = 407}$$

2) L'effectif de cette population après six années est de

$$\boxed{N(6) = \int_0^6 (2t+e^t)\ dt + N(0) = \left[t^2+e^t\right]_0^6 + 300 = 6^2+e^6-1+300 = 735}$$

Exercice 3 *(points)*

1) La solution générale de l'équation différentielle homogène $y'(x) - 3y(x) = 0$ est

$$\boxed{y_h(x) = \lambda e^{3x}}, \qquad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}$$

2) On pose $u' = e^{2x}, v = x$; donc $u = \dfrac{e^{2x}}{2}, v' = 1$, alors

$$\boxed{\int xe^{2x}\, dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}\, dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4}.}$$

3) Une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre
$(E) \qquad y'(x) - 3y(x) = xe^{5x}$ est

$$\boxed{y_p(x) = \frac{xe^{5x}}{2} - \frac{e^{5x}}{4}}$$

4) Les solutions de l'équation différentielle (E) sont

$$\boxed{y(x) = \lambda e^{3x} + \frac{xe^{5x}}{2} - \frac{e^{5x}}{4}}, \qquad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}$$

5) La solution de (E) qui vérifie $y(1) = 0$ doit vérifier : $0 = y(1) = \lambda e^3 + \frac{e^5}{2} - \frac{e^5}{4}$ c-à-d $1 = \lambda e^3 + \frac{e^5}{4}$ d'où $\lambda = -\frac{e^5}{4e^3} = -\frac{e^2}{4}$ ainsi

$$\boxed{y(x) = -\frac{e^{3x+2}}{4} + \frac{xe^{5x}}{2} - \frac{e^{5x}}{4}}$$

Exercice 4 *(points)*

Les mesures du rayon r et de la hauteur h d'un cône de révolution donnent :
$r = 2 \pm 0,2$ m et $h = 5 \pm 0,5$ m.
l'incertitude relative sur la mesure du volume $V = \frac{4\pi}{3}hr^2$ est donnée par

$$\boxed{\frac{\triangle V}{V} = \frac{\triangle h}{h} + 2\frac{\triangle r}{r} = \frac{0,5}{5} + 2\frac{0,2}{2} = 10\% + 20\% = 30\%}$$