UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Mathématiques (Analyse)

Examen Terminal du 7 janvier 2016

Vous disposez de **2h** pour répondre aux questions des exercices suivants. Les documents et calculatrices sont interdits. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs.
Le barème est à titre indicatif. La notation prendra en compte la rédaction.
Le sujet comporte 4 exercices indépendants et est imprimé recto-verso.

Exercice 1 *(9 points)*

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{4x^2 - 5x + 17}{x - 1}.$$

1) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2) Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,
$$f'(x) = \frac{4(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}.$$
3) Étudier le signe de la dérivée de f.
4) Étudier les limites de f aux bornes du domaine de définition $\mathcal{D}_f$.
5) Dresser le tableau de variation de f.
6) Montrer que
$$f(x) = 4x - 1 + \frac{16}{x-1}.$$
En déduire que la courbe représentative de f admet, au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$, une asymptote oblique dont on précisera l'équation.
7) Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
8) **Question bonus :** Montrer que le point $(1, 3)$ est centre de symétrie de la courbe représentative de f.

Exercice 2 *(3 points)*

1) Le nombre $N(t)$ d'individus d'une population d'animaux augmente au cours du temps t exprimé en années à la vitesse de $N'(t) = 2t + e^t$.
De combien la population a-t-elle augmenté entre la troisième et la sixième année ?
On prendra comme valeur approchée $e^3 = 20$ et donc $e^6 = e^3.e^3 = 400$.

2) On suppose qu'initialement, au temps $t = 0$, cette population était composée de 300 animaux. Quel est l'effectif de cette population après six années ?

Exercice 3 *(6 points)*

1) Donner la solution générale de l'équation différentielle homogène

$$y'(x) - 3y(x) = 0.$$

2) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int xe^{2x}\,dx$.

3) Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre

$$(E) \qquad y'(x) - 3y(x) = xe^{5x}.$$

(*On pourra utiliser la méthode de la variation de la constante et la question 2.*)

4) Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

5) Déterminer la solution de (E) qui vérifie $y(1) = 0$.

Exercice 4 *(2 points)*

Les mesures du rayon r et de la hauteur h d'un cône de révolution donnent :
$r = 2 \pm 0,2$ m et $h = 5 \pm 0,5$ m.
Quelle est-l'incertitude relative sur la mesure du volume V du cône ?
On rappelle que $V = \frac{4\pi}{3} hr^2$.