

EXAMEN DU 9 JANVIER 2015

Avertissement : les documents, calculatrices et autres dispositifs électroniques sont interdits.
La présentation générale et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des réponses. Durée 2h.

Exercice 1

Il a été établi que la relation entre le poids P en kilogramme et la taille L en mètre des thons rouges (Thunnus thynnus) de Méditerranée était

$$P = a L^3$$

où a est une constante dépendant de la maturité du thon et des conditions environnementales. Si l'incertitude relative sur la longueur d'un thon est de 10%, quelle est l'incertitude relative correspondante pour le poids de ce thon ?

Exercice 2

On s'intéresse dans cet exercice à la fonction de Gauss g définie par $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.

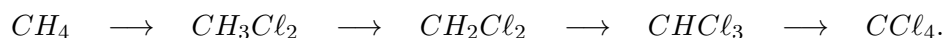
- 1 - a) Déterminer l'ensemble de définition de g . La fonction g est-elle paire ? (Justifiez votre réponse.)
- b) Calculer la dérivée de g .
- c) En déduire le tableau de variation de g . On précisera dans ce tableau les limites de la fonction et de sa dérivée en $\pm\infty$ en justifiant les résultats.
- d) Donner l'allure de la représentation graphique de g .

2 - a) Soit α un réel strictement positif. Calculer l'intégrale $\int_0^\alpha x g(x) dx$. Que vaut $\int_{-\alpha}^\alpha x g(x) dx$? (Expliquez sans faire de calcul.)

- b) En utilisant la formule de primitivation (ou d'intégration) par parties, calculer les primitives de $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 g(x)$.
- c) Déterminer la primitive F de f vérifiant $F(0) = 0$.

Exercice 3

On considère un réacteur dans lequel on fait réagir du méthane CH_4 dans du dichlore Cl_2 en excès. On peut dans ce cas modéliser les réactions chimiques par des cinétiques d'ordre 1 :



1 - On désigne par $x(t)$ la concentration en CH_4 à l'instant t (exprimé en seconde). Les lois cinétiques indiquent que $x(t)$ vérifie l'équation différentielle

$$x'(t) + 4x(t) = 0. \tag{1}$$

- a) Déterminer la solution générale de l'équation (1).
- b) Donner la solution de l'équation (1) qui satisfait la condition initiale $x(0) = 1$.

2 - On désigne par $y(t)$ la concentration en CH_3Cl à l'instant t . Les lois cinétiques indiquent que $y(t)$ vérifie l'équation différentielle

$$y'(t) + 3y(t) = 4e^{-4t}. \quad (2)$$

- a) Résoudre l'équation différentielle homogène $y'(t) + 3y(t) = 0$.
- b) Déterminer une solution particulière de l'équation (2).
- c) Donner la solution générale de l'équation (2).
- d) Déterminer la solution de l'équation (2) qui vérifie la condition initiale $y(0) = 0$.

Exercice 4

On considère l'équation différentielle

$$z''(t) + 3z'(t) + 2z(t) = 24(e^{-3t} - e^{-4t}). \quad (3)$$

- 1 - Résoudre l'équation différentielle homogène $z''(t) + 3z'(t) + 2z(t) = 0$ associée à l'équation (3).
- 2 - Vérifier que la fonction $t \mapsto 12e^{-3t} - 4e^{-4t}$ est solution de l'équation (3).
- 3 - Dédire des questions 1) et 2) l'expression de la solution générale de l'équation (3).
- 4 - Donner la solution de l'équation (3) qui vérifie les conditions initiales $z(0) = 0$ et $z'(0) = 0$.