Université de Rennes 1, Licence Biologie, S1 2013-2014
Mathématiques (Analyse)

Examen 1ère session - Corrigé

Exercice 1

Q1. La fonction f étant une fraction rationnelle, elle est définie et dérivable là où son dénominateur est non nul. Or, $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$, donc $Df = Df' = \mathbb{R}\backslash\{2\}$.

Q2. Dérivons f:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(6x+1)(x-2)-(3x^2+x-2)}{(x-2)^2} = \frac{6x^2(x-2)+(x-2)-3x^2-(x-2)}{(x-2)^2} \\ &= \frac{3x^2-12x}{(x-2)^2} = \frac{3x(x-4)}{(x-2)^2}. \end{aligned}$$

On déduit de la forme factorisée le tableau de signes de f':

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$3x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-2)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	

Q3. En l'infini, on utilise le théorème des termes de plus haut degré pour écrire que

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} 3x = \pm\infty.$$

En 2, le numérateur vaut 12 tandis que le dénominateur s'annule. Les limites en 2 sont donc infinies avec:

- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ car $x-2$ tend vers 0 par valeurs négatives,
- et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$ car $x-2$ tend vers 0 par valeurs positives.

Q4. On dresse le tableau de variations de f:

x	$-\infty$		0			2			4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$\|$		$-$	0	$+$	
f			1			$\|$	$+\infty$				$+\infty$
		$\nearrow$		$\searrow$		$\|$		$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				$-\infty$	$\|$			25		

La courbe représentative de f admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$ puisque les limites de f en 2 sont infinies.

Q5. En mettant l'expression de droite au même dénominateur, on a

$$3x + 7 + \frac{12}{x-2} = \frac{(3x+7)(x-2)+12}{x-2} = \frac{3x^2+7x-6x-14+12}{x-2} = \frac{3x^2+x-2}{x-2} = f(x).$$

Effectuons à présent une étude asymptotique en l'infini: déterminons $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x$. D'après le théorème des termes de plus haut degré, on a

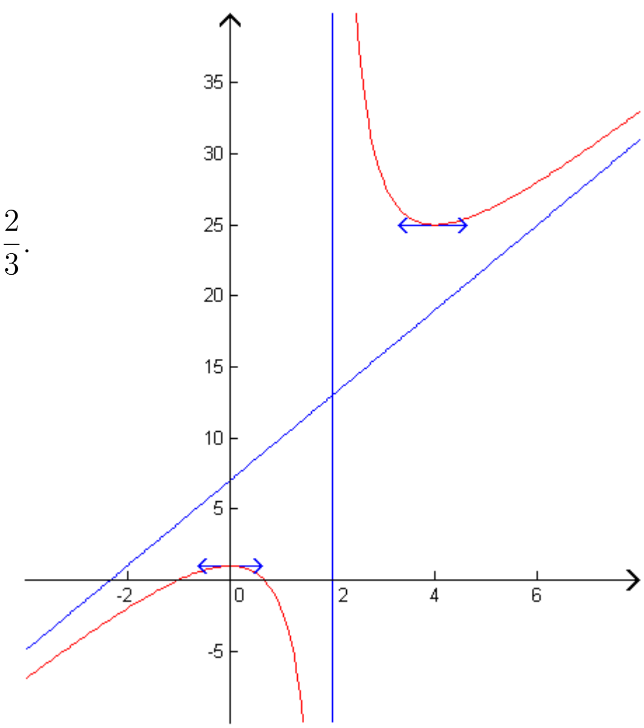
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} 3 = 3,$$

et, d'après l'expression de $f(x)$ que l'on vient de montrer, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - 3x = 7$, vu que $1/(x-2)$ tend vers 0. On a ainsi montré que la droite d'équation $y = 3x + 7$ est asymptote (oblique) à la courbe.

Q6. Résoudre $f(x) = 0$ revient à résoudre $3x^2 + x - 2 = 0$. Pour ce faire, on calcule le discriminant, $\Delta = 25$, ainsi f s'annule en

$$x_- = \frac{-1-5}{6} = -1 \quad \text{et en} \quad x_+ = \frac{-1+5}{6} = \frac{2}{3}.$$

Q7. Une fois le repère tracé, on place les deux tangentes horizontales en $(0, 1)$ et $(4, 25)$, et les asymptotes d'équation $x = 2$ et $y = 3x + 7$ (en reliant les points $(0, 7)$ et $(1, 10)$ par exemple). Ensuite, on trace la courbe au voisinage des tangentes horizontales en veillant bien à ne pas faire d'angle: les points critiques sont des extrema locaux. La courbe doit ensuite s'approcher des asymptotes tracées auparavant.



Exercice 2

Q1. La fonction g étant de la forme $g(x) = \sqrt{p(x)}$, où p est un polynôme, elle est définie là où on a $p(x) \geq 0$, et dérivable là où $p(x) > 0$. On étudie donc le signe de $p(x) = x^2 - 6x + 10$: on calcule le discriminant, et on trouve $\Delta = -4 < 0$. p n'a pas de racine et $p(x)$ a le même signe que le coefficient dominant de p; on a donc $p(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $Dg = Dg' = \mathbb{R}$.

Q2. On remplace x par $x+3$ dans l'expression de g, pour aboutir à

$$h(x) = \sqrt{(x+3)^2 - 6(x+3) + 10} = \sqrt{x^2 + 6x + 9 - 6x - 18 + 10} = \sqrt{x^2+1}.$$

On vérifie alors facilement que h est définie sur $\mathbb{R}$, domaine symétrique par rapport à 0, et que $h(-x) = \sqrt{(-x)^2+1} = \sqrt{x^2+1} = h(x)$, donc h est paire.

Q3. On part de l'expression de droite. Comme $x \geq 3$, $(x-3) = \sqrt{(x-3)^2}$, ainsi

$$(x-3)\sqrt{1 + \frac{1}{(x-3)^2}} = \sqrt{(x-3)^2+1} = \sqrt{x^2 - 6x + 9 + 1} = g(x).$$

La suite était bien plus difficile que l'énoncé le laissait paraître. L'égalité que l'on vient de montrer permet en effet d'avoir, très simplement, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)/x = 1$ (l'expression sous la racine tend vers 1, et le quotient $(x-3)/x$ tend vers 1 par le théorème des termes de plus haut degré). Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) - x$ ne découlait pas de la même égalité, puisqu'elle donne une forme indéterminée.

A la place, on doit utiliser l'identité remarquable $(g(x) - x)(g(x) + x) = g(x)^2 - x^2$ (en conséquence la question méritait certainement une indication supplémentaire), comme dans l'exercice 2 du devoir maison, et on obtient

$$g(x) - x = \frac{-6x + 10}{\sqrt{x^2 - 6x + 10} + x}.$$

En factorisant le dénominateur par x, on obtient alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) - x = -6/2 = -3$, ce qui assure bien que la courbe représentative de g admet la droite d'équation $y = x - 3$ comme asymptote.

Exercice 3

Q1. (a) L'équation différentielle $y'(x) = a(x)y(x)$ est linéaire d'ordre 1 homogène.

(b) On pouvait vérifier que $y(x) = Ce^{A(x)}$, avec A primitive de a, est solution de l'équation de deux manières: en résolvant l'équation par variables séparées (intégrer $y'(x)/y(x)$) comme dans le cours, ou dériver la forme proposée. En effet,

$$y'(x) = CA'(x)e^{A(x)} = a(x) \times Ce^{A(x)}$$

puisque A est une primitive de a. On reconnaît à droite $a(x)y(x)$, donc $Ce^{A(x)}$ résout bien l'équation différentielle.

Q2. On peut traiter les deux termes séparément:

$$\int_0^x 1 + \frac{2t}{t^2+1}\ dt = \int_0^x 1\ dt + \int_0^x \frac{2t}{t^2+1}\ dt = x - 0 + \int_0^x \frac{u'(t)}{u(t)}\ dt,$$

avec $u(t) = t^2 + 1 > 0$ pour tout $t \in [0, x]$. $u'(t)/u(t)$ est la dérivée de $\ln(u(t))$, donc la dernière intégrale vaut donc $[\ln(t^2+1)]_0^x = \ln(x^2+1) - \ln(1)$, et on conclut que

$$\int_0^x 1 + \frac{2t}{t^2+1}\ dt = x + \ln(x^2+1).$$

Q3. D'après la question 1, les solutions de l'équation sont de la forme $y(x) = Ce^{A(x)}$, où A est une primitive de $a(x) = 1 + 2x/(x^2+1)$. Or, nous en avons calculé une à la question 2 (il s'agit de la primitive de a qui s'annule en 0), ainsi

$$y(x) = Ce^{x+\ln(x^2+1)} = Ce^x \exp(\ln(x^2+1)) = C(x^2+1)e^x,$$

en utilisant la réciprocité exp-ln.

Pour trouver la solution satisfaisant la condition initiale $y(0) = 1$, on résout l'équation en C: $C(0^2+1)e^0 = 1 \Rightarrow C = 1$. Donc $y(x) = (x^2+1)e^x$ est la solution de l'équation $y'(x) = (1 + 2x/(x^2+1))y(x)$ avec la condition $y(0) = 1$.

Exercice 4

Q1. Nous ne pouvons pas, en effet, intégrer directement le produit $\cos(t)e^t$, alors on procède par intégration par parties. En posant

$$\begin{array}{rcl} u'(t) = e^t & \longrightarrow & u(t) = e^t \\ v(t) = \cos(t) & \longrightarrow & v'(t) = -\sin(t) \end{array},$$

on applique la formule d'intégration par parties:

$$\int^x \cos(t)e^t\ dt = \int^x u'(t)v(t)\ dt = u(x)v(x) - \int^x u(t)v'(t)\ dt = \cos(x)e^x + \int^x \sin(t)e^t\ dt$$

Ne pouvant traiter directement le terme intégral restant, on refait une intégration par parties, en posant $u'(t) = e^t$ à nouveau, et $v(t) = \sin(t)$, ainsi

$$\int^x \cos(t)e^t\ dt = \cos(x)e^x + \sin(x)e^x - \int^x \cos(t)e^t\ dt.$$

Attention: les deux primitives de $\cos(x)e^x$ situées de part et d'autres de l'égalité ne sont pas forcément les mêmes (pas de borne spécifiée en bas des intégrales), elles sont donc égales à une constante près. Il existe donc $K \in \mathbb{R}$ telle que

$$2\int^x \cos(t)e^t\ dt = \cos(x)e^x + \sin(x)e^x + 2K,$$

ce qui donne bien l'égalité voulue.

Q2. L'équation $y'(x) = -y(x)+\cos(x)$ est linéaire d'ordre 1 non homogène. Les solutions de l'équation homogène associée, $y'(x) = -y(x)$, sont de la forme $y(x) = Ce^{-x}$ (on ne demandait pas le détail de cette étape).

Pour résoudre l'équation complète, on recourt à la méthode de variation de la constante: on cherche les fonctions $C(x)$ telles que $y(x) = C(x)e^{-x}$ sont solution de l'équation. Dérivons: $y'(x) = C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x} = -C(x)e^{-x} + \cos(x)$ d'après l'équation, donc on se ramène à intégrer $C'(x) = \cos(x)e^x$. Nous l'avons fait à la question précédente, ainsi les solutions de l'équation non homogène sont de la forme

$$y(x) = \left(\frac{e^x}{2}(\cos(x) + \sin(x)) + K\right)e^{-x} = \frac{\cos(x) + \sin(x)}{2} + Ke^{-x}.$$

Déterminons enfin la solution satisfaisant $y(0) = 1$: on cherche K telle que

$$\frac{\cos(0) + \sin(0)}{2} + Ke^0 = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{2}.$$

La fonction $y(x) = 1/2(\cos(x) + \sin(x) + e^{-x})$ est donc solution de l'équation différentielle $y'(x) = -y(x) + \cos(x)$ avec condition initiale $y(0) = 1$.