Université de Rennes 1, Licence Biologie, S1 2013-2014
Mathématiques (Analyse)

Examen Terminal, 1^{ere} session
Mercredi 8 janvier 2014 - Durée : 2 heures
Documents et appareils avec fonctionnalité de calcul interdits.

Le barème est donné à titre indicatif. La notation prendra en compte la rédaction.
Le sujet comporte 4 exercices indépendants et est imprimé recto-verso.

***Exercice 1** *(8 points)*

On considère la fonction suivante :

$$f(x) = \frac{3x^2 + x - 2}{x - 2}.$$

Q1. (1pt) Déterminer le domaine de définition et de dérivabilité de f.

Q2. (1,5pt) Montrer que

$$f'(x) = \frac{3x(x-4)}{(x-2)^2},$$

et dresser le tableau de signes de f.

Q3. (1pt) Calculer les limites de f aux bords de son domaine de définition.

Q4. (1,5pt) Dresser le tableau de variations complet de f.
La courbe représentative de f admet-elle des asymptotes verticales ? Justifier la réponse et donner le cas échéant l'équation de la droite asymptote.

Q5. (1pt) Montrer que

$$f(x) = 3x + 7 + \frac{12}{x-2}.$$

En déduire que la courbe représentative de f admet, au voisinage de $\pm\infty$, une asymptote oblique dont on précisera l'équation.

Q6. (0,5pt) Résoudre $f(x) = 0$.

Q7. (1,5pt) En tenant compte de tous les résultats précédents, tracer l'allure du graphe de f. Ce graphe prendra une pleine page et doit être tracé au stylo.
Le repère doit être orthogonal, mais peut ne pas être orthonormé. On recommande 2cm par unité pour l'axe des abscisses et 0,5cm par unité pour l'axe des ordonnées.

TSVP

***Exercice 2** *(3 points)*

Q1. (1,5pt) Déterminer le domaine de définition et de dérivabilité de la fonction

$$g(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 10}.$$

Q2. (0,5pt) Montrer que la fonction définie par $h(x) = g(x+3)$ est paire.

Q3. (1pt) Montrer que, lorsque $x \geq 3$,

$$g(x) = (x-3)\sqrt{1 + \frac{1}{(x-3)^2}},$$

et en déduire que la droite d'équation $y = x - 3$ est asymptote à la courbe représentative de g en $+\infty$.

***Exercice 3** *(4 points)*

Q1. (0,5pt) Quelle est la nature de l'équation différentielle suivante ?

$$y'(x) = \left(1 + \frac{2x}{x^2+1}\right) y(x)$$

Q2. (3pt) <u>En utilisant la méthode de résolution du cours</u>, montrer que les solutions de l'équation ci-dessus sont de la forme

$$y(x) = C(x^2+1)e^x \quad , \ C \in \mathbb{R}.$$

Q3. (0,5pt) Quelle solution satisfait la condition initiale $y(0) = 1$?

***Exercice 4** *(5 points)*

Q1. (2,5pt) Montrer que

$$\int^x \cos(t)e^t \, dt = \frac{e^x}{2}(\cos(x) + \sin(x)) + K \quad , \ K \in \mathbb{R}.$$

Pour ce faire, on utilisera deux intégrations par parties successives.

Q2. (2,5pt) Donner la nature de l'équation différentielle $y'(x) = -y(x) + \cos(x)$, et la résoudre avec la condition initiale $y(0) = 1$. On pourra ne pas détailler la résolution de l'équation homogène associée.