Université de Rennes1 **L1-Biologie : Analyse** Année 2014-2015

Corrigé succinct du CC

Exercice 1 (Question de cours) .

1) Montrer que la fonction $F(x) = x\ln(x) - x + 1$, définie sur $]0, +\infty[$, est une primitive de la fonction $f(x) = \ln(x)$.

2) Que valent $\ln(1)$ et $\ln(e^2)$?

3) Calculer $\int_1^{\ln(e^2)} \ln(x)\ dx$.

Réponse :

1) Comme $F'(x) = \ln(x) + x\dfrac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$,
donc $F(x) = x\ln(x) - x + 1$ *est une primitive de* $f(x) = \ln(x)$.

2) $\ln(1) = 0$ *et* $\ln(e^2) = 2\ln(e) = 2\ln(e) = 2$

3) Puisque $x\ln(x) - x + 1$ *est une primitive de* $\ln(x)$ *alors*

$$\int_1^{\ln(e^2)} \ln(x)\ dx = [F(x)]_1^{e^2} = e^2\ln(e^2) - e^2 + 1 - (\ln(1) - 1 + 1) = 2e^2 - e^2 + 1 = e^2 + 1.$$

Exercice 2

Une étude montre que la mortalité des pigeons dépend de la concentration x, $(x \geqslant 0)$, de produits polluants dans l'air. L'étude propose la formule suivante, de la mortalité en fonction de x :

$$f(x) = \frac{e^x}{1 + x^2}$$

Le terme e^x est sensé modéliser la forte croissance de la mortalité en fonction de la pollution alors que le terme $1 + x^2$ prend en compte l'existence d'un effet de seuil dans l'évolution de la mortalité.

1) Quel est le domaine de définition de f?

2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{(x-1)^2 e^x}{(1+x^2)^2}$.

3) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

4) Déterminer le tableau de variation de f.

5) Quel est le point seuil x_0, c.-à.d. le point x_0 tel que la croissance de la mortalité s'atténue lorsque x est proche de x_0 mais augmente à nouveau fortement lorsqu'il s'en éloigne ?

Réponse :

1) Puisque e^x *et* $1 + x^2$ *sont définies pour tout x réel, de plus le dénominateur* $1 + x^2 \geqslant 1 > 0$ *ne s'annule jamais, ainsi la fonctions f qui est le quotient de ces 2 fonctions est définie pour tout réel x.*

Alors, le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$ mais comme on ne considère que les $x \geqslant 0$, alors le domaine d'étude est $[0 + \infty[$.

2) f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = e^x$ et $v(x) = 1 + x^2$.
La formule de dérivation d'un quotient donne

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)} = \frac{e^x(1+x^2) - 2xe^x}{(1+x^2)^2} = \frac{(x^2 - 2x + 1)e^x}{(1+x^2)^2} = \frac{(x-1)^2 e^x}{(1+x^2)^2}.$$

3) On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1+x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty.$

4) *Puisque* $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2e^x = 0$, *comme* $e^x > 0$, $(x-1)^2e^x \geqslant 0$ *et* $(x-1)^2e^x = 0 \Leftrightarrow x = 1$
Ainsi $f'(x) \geqslant 0$ *et* $f'(x) = 0$ *si et seulement si* $x = 1$; *d'où le tableau de variation de* f :

x	0		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$+$	
f	1	$\nearrow$	$\frac{1}{2}e$	$\nearrow$	$+\infty$

5) *Le point seuil* x_0, *est le point où la dérivée s'annule donc* $x_0 = 1$. *(c'est un point d'inflexion).*

Exercice 3 *On considère un cylindre dont l'aire A est donnée par la formule :*

$$A(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

où r est le rayon et h la hauteur.

1) *Déterminer les dérivées partielles premières de A.*

2) *Calculer* $\frac{\partial A}{\partial r}(3,1)$ *et* $\frac{\partial A}{\partial h}(3,1)$.

3) *Supposons que les mesures effectuées donnent* $r = 3$ *m avec une incertitude de* $0,05$ *m et* $h = 1$ *m avec une incertitude de* $0,03$ *m.*
Déterminer l'incertitude absolue sur le calcul de l'aire du cylindre.

Réponse :

1) *On a* $\dfrac{\partial A}{\partial r}(r,h) = \dfrac{\partial A}{\partial r}\left(2\pi r^2 + 2\pi rh\right) = 4\pi r + 2\pi h$
et $\dfrac{\partial A}{\partial h}(r,h) = \dfrac{\partial A}{\partial h}\left(2\pi r^2 + 2\pi rh\right) = 2\pi r$

2) *D'où* $\dfrac{\partial A}{\partial r}(3,1) = 4\pi \times 3 + 2\pi \times 1 = 12\pi + 2\pi = 14\pi$ *et* $\dfrac{\partial A}{\partial h}(3,1) = 2\pi \times 3 = 6\pi$

3) *L'incertitude absolue sur le calcul de l'aire du cylindre est*

$$\Delta A = |\frac{\partial A}{\partial r}(3,1)|\Delta r + |\frac{\partial A}{\partial h}(3,1)|\Delta h = 14\pi \times 0,05 + 6\pi \times 0,03 = 0,7\pi + 0,18\pi = 0,88\pi$$

Remarque : *On peut calculer l'incertitude absolue sur le calcul de l'aire du cylindre sans calcul de dérivées partielles :*
On pose $f(r) = 2\pi r^2$ *et* $g(r,h) = 2\pi rh$ *et* $A(r,h) = f(r) + g(r,h)$.

Alors $\frac{\Delta f}{f} = 2\frac{\Delta r}{r} = 2\frac{0,05}{3} = \frac{0,1}{3}$ *et* $\frac{\Delta g}{g} = \frac{0,05}{3} + \frac{0,03}{1} = \frac{0,05}{3} + \frac{0,09}{3} = \frac{0,14}{3}$
par suite $\Delta f = f(3).\frac{\Delta f}{f} = 18\pi.\frac{0,1}{3} = 0,6\pi$ *et* $\Delta g = 6\pi\frac{0,14}{3} = 0,28\pi$.
Ainsi $\Delta A = \Delta f + \Delta g = 0,6\pi + 0,28\pi = 0,88\pi$.